UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Die Fuchs'schen Funktionen
im Briefwechsel zwischen
Henri Poincaré und **Lazarus Fuchs**

Sommer 1880

zusammengestellt von

Gabriele Dörflinger

Universitätsbibliothek Heidelberg

2012

Quelle: Acta mathematica. - Bd. 38 (1921), S. 175–178 und 185–187.

Lazarus Fuchs (1833 – 1902) lehrte nach dem Studium in Berlin als ordentlicher Professor der Mathematik in Greifswald, Göttingen, Heidelberg (1875–1884) und Berlin.

In seiner Heidelberger Zeit veröffentlichte er 1880 im Band 89 des *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle-Journal) auf Seite 151–169 einen Aufsatz über die Verallgemeinerung des Umkehrproblems mit dem Titel *Ueber eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coeffizienten entstehen.*

Henri Poincaré (1854 – 1912) wurde 1879 Professor für Analysis in Caen und lehrte ab 1881 als Professor an der Sorbonne in Paris.

Der Artikel von Lazarus Fuchs regte Henri Poincaré zu weiteren Untersuchungen an, die zur Theorie der automorphen Funktionen führten. Poincaré bat im Brief vom 12. Juni 1880 darum, die von Fuchs definierten Umkehrfunktionen als *Fuchssche Funktionen* benennen zu dürfen.

Poincaré, der den Artikel von Fuchs gelesen hat, bittet um Erläuterung einiger Punkte und berichtet von seinen weitergehenden Überlegungen.

Caen, le 29 Mai 1880.

Monsieur le Professeur,

J'ai lu avec le plus grand intérêt le remarquable mémoire que vous avez fait insérer dans la dernière livraison du Journal de Crelle et qui a pour titre: Ueber die Verallgemeinerung des Umkehrproblems. Veuillez me permettre, Monsieur, de vous demander au sujet de ce travail, quelques éclaircissements.

Vous démontrez, page 159 que la fonction z est fonction méromorphe de ζ, toutes les fois que ζ prend une valeur correspondant à une valeur donnée de z; que cette valeur de z soit un point ordinaire ou un point singulier, qu'elle soit finie ou infinie. Vous démontrez ensuite, page 160 que cela est encore vrai pour $\zeta = \infty$ et comme conclusion vous dites:

. . . . . so ist die durch die Gleichung (H.) definirte Function z von ζ für alle Werthe von ζ meromorph.

Il s'agit ici de toutes les valeurs de ζ finies et infinies; cet énoncé ferait donc entendre que z est fonction méromorphe *dans toute l'étendue de la sphère* et par conséquent fonction rationnelle de ζ; on en conclurait que l'équation (A.) est toujours intégrable algébriquement ce qui n'est pas exact comme vous le faites voir un peu plus loin page 168.

A quoi tient cette contradiction? C'est à ce que les valeurs de ζ sont de 3 sortes:

1. Celles qu'on peut faire atteindre à la fontion $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ en faisant décrire à la variable z sur la sphère un certain contour *fini* un nombre *fini* de fois.

2. Celles qu'on peut faire atteindre à cette fonction en faisant décrire à z un contour infini ou bien un contour *fini* un nombre *infini* de fois.

3. Celles qu'on ne peut *jamais* faire atteindre à la fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ *quel que soit* le contour décrit par z sur la sphère.

Rien ne prouve en effet *a priori* qu'il n'y ait pas des valeurs de ces trois sortes et même, en général, on est certain qu'il y en a de la 2^{de} ou de la 3^{e} sorte, sans quoi, je le répète, l'équation (A.) serait intégrable algébriquement.

Mais alors il me semble qu'il faudrait encore démontrer que z reste méromorphe quand ζ prend une valeur de la 2^{e} ou de la 3^{e} sorte, et que la démonstration que vous avez donnée dans votre mémoire ne s'applique qu'à celles de la $1^{\mathrm{ère}}$ sorte.

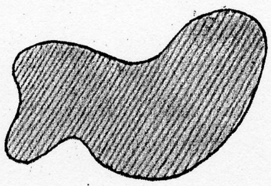
On peut en effet faire plusieurs hypothèses:

1. on peut supposer que l'on n'a que des valeurs de la $1^{\mathrm{ère}}$ sorte et alors z est rationnel en ζ.

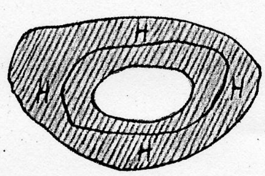
2. on peut supposer que l'on a des valeurs de la première et de la 2^{e} sorte et que z reste monodrome quand ζ prend une des valeurs de la 2^{e} sorte. Dans cette hypothèse votre théorème trouverait encore son application.

3. on peut supposer que l'on a des valeurs de la $1^{\mathrm{ère}}$ et de la 2^{e} sorte, mais que z ne revienne pas à la même valeur, quand ζ décrit un contour infiniment petit autour d'une des valeurs de la 2^{e} sorte.

4. on peut encore imaginer que l'on ait des valeurs des trois sortes; que les valeurs de la $1^{\mathrm{ère}}$ sorte remplissent la région du plan que je couvre de hachures sur la figure, que le périmètre de cette région soit formé de valeurs de la 2^{e} sorte; enfin que les parties extérieures à ce périmètre correspondent à des valeurs de la 3^{e} sorte. Alors la fonction z *n'existe plus* quand ζ sort de ce périmètre, et ne peut prendre qu'une seule valeur quand ζ reste dans ce périmètre. Alors z n'est pas, à proprement parler fonction *analytique* de ζ; mais elle est *eindeutig* en ζ, ce qui vous suffit pour les conséquences que vous en tirez.



5. on peut imaginer que l'on ait des valeurs des trois sortes, disposées comme dans la figure ci-contre, où la région occupée par des valeurs de la $1^{\mathrm{ère}}$ sorte est couverte de hachures. Alors z pourrait ne pas revenir à la même valeur quand ζ décrirait un contour tel que $HHHH$.



Enfin on pourrait encore faire mille autres hypothèses.

Je dois avouer, Monsieur, que ces réflexions m'ont inspiré quelques doutes sur la généralité du résultat que vous annoncez, et j'ai pris la liberté de vous en parler, dans l'espérance que vous n'auriez pas de peine à les éclaircir.

Mon adresse est: HENRI POINCARÉ, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen (Calvados).

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'assurance de ma considération respectueuse.

Poincaré.

(Quelle: Acta mathematica. - 38 (1921), S. 175–177)

Heidelberg 5 Juni 1880.

Geehrtester Herr Collega!

Da ich aus Ihrem geschätzten Briefe ersehe, dass Sie deutsche Abhandlungen mit so tiefem Verständniss zu lesen in der Lage sind, so erlaube ich mir bei der Beantwortung Ihres Briefes mich auch dieser Sprache zu bedienen, weil ich hoffen darf, mich auf diese Weise klarer ausdrücken zu können.

Empfangen Sie, geehrtester Herr, vor allen Dingen meinen besten Dank nicht nur für das Interesse, welches Sie die Güte haben meiner jüngsten Arbeit entgegenzubringen, sondern auch dafür, dass Sie mich durch Ihren Brief darauf aufmerksam gemacht haben, dass der Satz I p. 161 meiner Abhandlung nicht mit genügender Präcision ausgesprochen ist.

Wenn Sie in der That das Resumé vergleichen, welches ich, vor dem Erscheinen meiner Arbeit im Borchardtschen Journal, von meinen Resultaten in den „Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ Februar 1880 p. 170–176 gegeben habe, so werden Sie daselbst p. 173 finden, dass ich dort denselben Satz in der Weise ausgedrückt habe, dass unter den über die Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gemachten Voraussetzungen durch die Gleichung

$$(H) \qquad \zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

z als *eindeutige* Function von ζ definirt werde.

Gestatten Sie mir nun mit wenigen Worten auf die Bedeutung des Satzes einzugehen.

Aus den Entwickelungen meiner Arbeit in Borchardt's Journal p. 158–160 ergiebt sich Folgendes: Berechnet man für jeden Werth von z die zugehörigen Wertbe von ζ, indem man z alle möglichen Umläufe machen lässt — gleichgültig ob eine endliche oder eine unendliche Anzahl mal, so erhält ζ von z abhängige Werthe, *so lange die Umläufe nicht so beschaffen sind,, dass dadurch* $f(z)$ *und* $\varphi(z)$ *identisch das heisst für jeden Werth von* z *unendlich werden.*

Die Werthe von ζ für welche nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, erfüllen in der ζ-Ebene eine einfach zusammenhängende Fläche, welche ich mit S bezeichnen will. Diese Fläche bedeckt die ζ-Ebene nur *einfach* und an ihrer Begrenzung liegen diejenigen Werthe von ζ für welche $f(z)$ und $\varphi(z)$ *identisch* unendlich werden. *Innerhalb der Fläche* S *eine meromorphe Function von* ζ. Dieses ist der Sinn des Satzes I p. 161, und ein Weiteres brauche ich für die Anwendungen, welche ich von demselben mache, nicht.

Ich hoffe, dass Ihnen diese Worte zur Aufklärung über den Sinn, welchen ich dem Satze I p. 161 beilege, genügen werden, um so mehr als ich aus Ihrem Briefe ersehe, dass Sie sich der Ergründung der vorliegenden analytischen Frage bereits mit so grossem Scharfsinn gewidmet haben.

Genehmigen Sie, Hochgeehrter Herr, die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung.

L. Fuchs.

(Quelle: Acta mathematica. - 38 (1921), S. 185–186)

FUCHS dankt für den Hinweis auf den ungenau formulierten Satz I: *Genügen für jeden singulären Punkt die Grössen* r_1, r_2 *den Bedingungen ..., so ist die durch die Gleichung* (*H.*) *definirte Function* z *von* ζ *für alle Werthe von* ζ *meromorph.* Er verweist auf den dem gleichen Thema gewidmeten Beitrag in den *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* vom Februar 1880.

Der Originalbrief Fuchs' ist im Band 11 der *Oeuvres de Henri Poincaré*, Paris, 1956 auf Seite 271–272 abgebildet.

Im zweiten Brief vom 12. Juni 1880 berichtet POINCARÉ von seinen neuen Forschungen. Er bittet FUCHS um die Genehmigung diese Funktionen als *Fuchssche Funktionen* zu bezeichnen, da er diese gefunden habe.

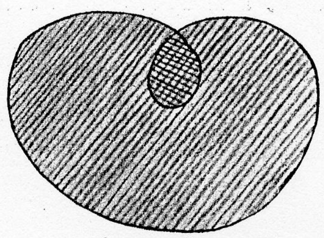
Caen, le 12 Juin 1880.

Très-honoré Monsieur,

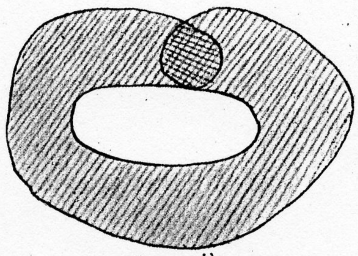
Je vous demande pardon, d'avoir tant tardé à répondre à votre aimable lettre; mais j'étais absent de Caen, lorsqu'elle est arrivée à son adresse; je l'ai reçue ce matin seulement et je l'ai lue avec le plus grand intérêt. Je vous remercie beaucoup des éclaircissements que vous avez bien voulu me donner et qui m'ouvrent des vues nouvelles sur cette question. Cependant, si je ne craignais d'abuser de votre obligeance, je prendrais la liberté d'appeler encore votre attention sur quelques points de détail, qui me semblent encore un peu obscurs.

Je suppose que sur le plan des z, je joigne tous les points singuliers au point ∞ par des coupures, puis que je fasse mouvoir z dans son plan de telle sorte qu'il ne franchisse aucune des coupures. ζ va alors *erfüllen* dans son plan une certaine surface F_0 qui sera évidemment *zusammenhangend.* Faisons maintenant mouvoir z dans son plan de telle sorte qu'il ne puisse franchir les diverses coupures plus de m fois; ζ va rester compris dans une nouvelle surface F_m qui sera toujours *zusammenhangend.* Quand m augmentera la région F_m va s'étendre de plus en plus et la surface que vous appelez F n'est autre chose que la limite de F_m pour $m = \infty$. Dire que cette surface F ne recouvre le plan que *einfach*, c'est dire que, quelque grand que soit m, F_m ne recouvrira le plan que *einfach.*

Or cela est-il une conséquence nécessaire de votre démonstration? Il me semble qu'il faudrait pour le faire voir ajouter quelques explications. En effet, comment lorsque m grandit, la région F_m peut-elle arriver à se recouvrir elle-même? Elle peut y arriver de deux manières ainsi que l'indique la figure suivante où le trait plein représente le contour de la région F_m et où cette région est recouverte d'une couche de hachures pendant que les parties du plan *où* F_m *se recouvre elle-même* sont couvertes d'une double couche de hachures.



1ère manière.



2e manière.

Votre démonstration, Monsieur, me paraît faire voir de la façon la plus claire, que la région F_m ne peut se recouvrir elle-même *de la* 1ère *manière*; mais non pas qu'elle ne peut se recouvrir elle-même *de la* 2e *manière*.

Je vois bien que cela est vrai lorsqu'il n'y a que deux points singuliers à distance finie. Dans ce cas j'arrive en effet, par des considérations un peu différentes à démontrer que F_m ne peut se recouvrire elle-même ni de la 1ère ni de la 2e manière. Alors la fonction z reste *eindeutig* dans l'intérieur de la surface F qui est ici un cercle.

Mais il ne me paraît pas évident qu'il en soit de même dans le cas général, de sorte que je me demande si le théorème est encore vrai quand il y a plus de deux points singuliers à distance finie.

Dans le cas où ces points singuliers ne sont qu'au nombre de deux je trouve que la fonction que vous avez définie jouit de propriétés fort remarquables et comme j'ai l'intention de publier les résultats que j'ai obtenus, je vous demanderai la permission de lui donner le nom de fonction Fuchsienne puisque c'est vous qui l'avez découverte.

Je vous demanderai aussi la permission de communiquer votre lettre à M. Hermite qui s'intéresse beaucoup à cette question.

Veuillez agréer, très honoré Monsieur, l'assurance de ma considération respectueuse. *Poincaré.*

(Quelle: Acta mathematica. - 38 (1921), S. 177–178)

Im Antwortschreiben verweist Fuchs auf seinen neu erscheinenden Artikel in den *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Universität Göttingen* vom Juli 1880.

Er dankt für die große Auszeichnung, die Funktionen mit seinem Namen zu benennen.

Heidelberg 16 Juni 1880.

Geehrter Herr Collega!

Empfangen Sie den herzlichsten Dank für Ihr freundliches Schreiben vom 12. Juni, wodurch Sie von Neuem ein so tief eingehendes Interesse für meine Arbeit kundzugeben die Güte gehabt haben.

Es würde mir ein besonderes Vergnügen bereiten in die Discussion der von Ihnen aufgestellten Frage einzutreten. Jedoch würde ich dadurch Ihre Geduld zum Ueberfluss in Anspruch nehmen. Denn eine Arbeit, welche ich schon vor der Veröffentlichung meiner Resultate in den Göttinger Nachrichten vom Februar dieses Jahres in Angriff genommen, seitdem aber — weil mich Anderes beschäftigte — liegen gelassen hatte, habe ich nun mehr zu Ende geführt. Diese Arbeit[1] enthält unter Anderem das Tableau aller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, welche ausser den übrigen in meiner Abhandlung angegebenen Eigenschaften noch die auf p. 161 derselben Abhandlung geforderte Eigenschaft besitzt, dass die Gleichung $\frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(Z_2)}$ nur erfüllt wird durch $z_2 = z_1$; natürlich so lange $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ überhaupt einen bestimmten Werth hat, d. h. so lange nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden. Die Arbeit enthält ausserdem die Integrale aller Differenzialgleichungen des Tableau's, und für jede derselben den *analytischen Ausdruck* von z als Function von ζ.

Sie sehen also, geehrter Herr, dass diese Arbeit jede weitere Discussion überflüssig macht. Ich hoffe die Resultate im Laufe der nächsten Wochen zu veröffentlichen, und werde mich beehren Ihnen einen Abzug zu schicken.

Es machte mir grosses Vergnügen in Ihrem Briefe zu lesen, dass Sie in Bezug auf die von mir definirten Functionen wichtige Resultate gefunden haben, welche Sie zu veröffentlichen beabsichtigen. Dass Sie die Güte haben wollen, die genannten Functionen mit meinem Namen zu bezeichnen, ist für mich sehr ehrenvoll und macht mich Ihnen zu Dank verpflichtet.

Es ist selbstverständlich, dass ich mit Ihrem Wunsche mein Schreiben dem Herrn Hermite mitzutheilen einverstanden bin.

Gereicht mir ja das Interesse, welches dieser grosse Mathematiker an meinen Arbeiten nimmt, nur zur grössten Genugthuung.

Empfangen Sie, geehrter Herr, die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung.

L. Fuchs.

(Quelle: Acta mathematica. - 38 (1921), S. 186–187)

[1] Über die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität, Göttingen 1880, Sitzung am 3. Juli, S. 445–453.