GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXV(CIV) **Nr. 1 / 2007**

Asupra aproximării funcţiilor trigonometrice

de Eugen Păltănea[1)]

Abstract

The aim of this paper is to give some rational approximation of the function Arctan in the interval $(0, \infty)$. These approximations are obtained by using homographic functions.

Key words: rational functions, homographic functions, Arctan
M.S.C.: 41A20

1. Introducere

În lucrarea de faţă ne propunem să indicăm aproximări de tip raţional ale funcţiei arctg pe intervalul $(0, \infty)$. Aproximările respective sunt obţinute prin considerarea succesivă a unor încadrări optime de tip omografic. Inegalităţile respective pot servi determinării unor majoranţi şi minoranţi convenabili ai funcţiilor trigonometrice tg, sin şi cos.

Definiţia 1. *Prin funcţie omografică înţelegem o funcţie raţională ω de tipul*:

$$\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma x + \delta \neq 0,$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, cu $\alpha\delta \neq \beta\gamma$.

Vom preciza noţiunile de majorant omografic, minorant omografic şi respectiv încadrare omografică. Pentru un interval I şi funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$, vom nota $f(x) \leq g(x)$, orice $x \in I$, prin $f \leq g$, subînţelegând faptul că intervalul I este fixat.

Definiţia 2. *Fie $I = (a, b)$ un interval deschis de numere reale, unde $-\infty \leq \leq a < b \leq \infty$. Considerăm o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Numim majorant omografic al funcţiei f pe intervalul I o funcţie omografică ω, definită pe I, cu proprietatea $f \leq \omega$.*

2. *Numim minorant omografic al funcţiei f pe intervalul I o funcţie omografică ω, definită pe I, cu proprietatea $\omega \leq f$.*

3. *O încadrare omografică a funcţiei f pe intervalul I se obţine prin considerarea simultană a unui minorant omografic şi a unui majorant omografic pe intervalul respectiv.*

[1)] Rezultatele din prezenta lucrare au fost prezentate, parţial, în cadrul celei de a XXXIII-a Sesiuni de comunicări metodico-ştiinţifice desfăşurate la Sinaia în 21 octombrie 2006. (N.R.)

Desigur că ne preocupă determinarea „celei mai bune“ încadrări omografice a unei funcţii pe un interval deschis. Evident, prezenţa celui mai mic majorant omografic, respectiv a celui mai mare minorant omografic, ar conferi optimalitate majorării, respectiv minorării, de acest tip. De regulă însă, existenţa acestor margini omografice nu este asigurată. Din acest motiv vom defini accepţiuni noi ale conceptului de mărginire omografică optimală. Astfel, este rezonabil să preferăm majoranţi sau minoranţi omografici care au aceleaşi limite în capetele intervalului ca şi funcţia aproximată. De asemenea, vom considera optime acele borne omografice care minimizează distanţa (măsurată cu ajutorul integralei) la funcţia considerată. Pentru două funcţii f şi g, continue pe I, vom nota:

$$\|f-g\| = \sup_{[u,v]\subset I} \int_u^v |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \in [0,\infty)\cup\{\infty\}.$$

Menţionăm că mărimea definită mai sus extinde noţiunea de distanţa dintre funcţii, considerată de regulă în spaţiul vectorial $\mathcal{L}^1(I)$ al funcţiilor absolut integrabile pe I.

Definiţia 3. *Fie $I=(a,b)$ un interval deschis de numere reale şi $f: I\to\mathbb{R}$.*

1. *Spunem că funcţia omografică ω este un majorant (respectiv minorant) omografic condiţionat al funcţiei f pe intervalul I dacă $f\le\omega$ (respectiv $\omega\le f$) şi există următoarele limite laterale:*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}(f(x)-\omega(x))=0, \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}}(f(x)-\omega(x))=0.$$

Funcţia f va admite o cea mai bună majorare omografică condiţionată dacă există un cel mai mic majorant omografic condiţionat $\overline{\omega}$ al funcţiei f pe intervalul I, deci există o funcţie $\overline{\omega}$ care satisface condiţiile următoare:

- *$\overline{\omega}$ este funcţie omografică, definită pe I;*
- *$f\le\overline{\omega}$;*
- $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x>a}}(f(x)-\overline{\omega}(x)) = \lim\limits_{\substack{x\to b,\\ x<b}}(f(x)-\overline{\omega}(x))=0$;
- *pentru oricare majorant omografic condiţionat ω al funcţiei f pe I avem $\overline{\omega}\le\omega$.*

În mod similar, f va admite o cea mai bună minorare omografică condiţionată dacă există un cel mai mare minorant omografic condiţionat $\underline{\omega}$ al funcţiei f pe intervalul I.

În cazul când funcţiile $\underline{\omega}$ şi $\overline{\omega}$ există (şi vor fi evident unice), spunem că dubla inegalitate:

$$\underline{\omega}(x)\le f(x)\le\overline{\omega}(x), \quad \forall\, x\in(a,b),$$

reprezintă cea mai bună încadrare omografică condiţionată a funcţiei f pe intervalul $I=(a,b)$.

2. *Spunem că majorantul omografic $\widetilde{\omega}$ al funcţiei f, continuă pe I, realizează cea mai fină majorare omografică dacă $\|\widetilde{\omega}-f\|<\infty$ şi pentru oricare alt majorant omografic ω al funcţiei f avem $\|\widetilde{\omega}-f\|\le\|\omega-f\|$. Similar definim cea mai fină minorare (respectiv încadrare) de tip omografic.*

Menţionăm că pe parcursul lucrării vom considera $I = (0, \infty)$.

Argumentul principal în favoarea studiului aproximării funcţiei arctg prin funcţii raţionale îl constituie derivata sa raţională. De asemenea existenţa asimptotei orizontale spre infinit, monotonia şi respectiv convexitatea funcţiei constituie premize ale obţinerii unor încadrări fine de tip raţional. Utilizarea unui procedeu iterativ de încadrări omografice optimale reprezintă o alternativă la aproximarea clasică de tip taylorian. Pe de altă parte, încadrarea de tip raţional a funcţiei arctg permite obţinerea unor încadrări comode ale funcţiilor trigonometrice sin, cos, tg. Metoda pe care o propunem în lucrarea de faţă se înscrie printre numeroasele preocupări recente pe plan internaţional privind evidenţierea unor inegalităţi trigonometrice. În finalul articolului vom face scurte referiri la rezultate de actualitate în domeniu.

2. Aproximarea omografică de ordinul 1

Consemnăm la început câteva rezultate utile.

Lema 1. *Au loc inegalităţile:*

$$\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2+1}, \quad \forall\, x \in (0,1) \tag{1}$$

$$\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2+1}, \quad \forall\, x \in (1,\infty) \tag{2}$$

$$\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}, \quad \forall\, x \in (0,\infty). \tag{3}$$

Demonstraţie. Pentru obţinerea primelor două inegalităţi, considerăm funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi x^2}{2(x^2+1)}$, $x \geq 0$. Derivata funcţiei, $f'(x) = \dfrac{x^2 - \pi x + 1}{(x^2+1)^2}$, admite rădăcinile pozitive $x_1 = \dfrac{\pi - \sqrt{\pi^2-4}}{2} < 1$ şi $x_2 = \dfrac{\pi + \sqrt{\pi^2-4}}{2} > 1$. Avem $f(0) = f(1) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Atunci, analizând semnul derivatei, deducem că funcţia f este strict pozitivă pe intervalul $(0,1)$ şi respectiv strict negativă pe intervalul $(1,\infty)$. Astfel, inegalităţile (1) şi (2) sunt dovedite.

Fie acum funcţia $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right), \quad x > 0.$$

Avem $g'(x) = 2(x^2+1)^{-1} f(x)$, $x > 0$. Din inegalităţile (1) şi (2) rezultă că funcţia g este strict crescătoare pe $(0,1)$ şi respectiv strict descrescătoare pe $(1,\infty)$. Cum $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, obţinem $g(x) > 0$, pentru orice $x > 0$, deci inegalitatea (3) este satisfăcută. ■

Lema 2. *Funcţia* $\theta : (0.\infty) \to \mathbb{R}$ *definită prin:*

$$\theta(x) = \frac{x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}{\operatorname{arctg} x}, \ x > 0,$$

este strict descrescătoare, convexă şi are ca imagine intervalul $\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$. *În plus:*

$$\lim_{x\to 0, x>0} \theta'(x) = -1; \quad \lim_{x\to\infty} \theta'(x) = 0. \tag{4}$$

Demonstraţie. Utilizăm rezultatul (3) al lemei precedente. Astfel, avem:

$$\theta'(x) = -\frac{\operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right)}{\operatorname{arctg}^2 x} < 0, \quad \forall\, x > 0. \tag{5}$$

Atunci funcţia θ este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$. Aplicând regula lui l'Hospital, obţinem $\lim\limits_{x\searrow 0} \theta(x) = \frac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \theta(x) = \frac{2}{\pi}$. Ca urmare, avem $\frac{2}{\pi} < \theta(x) < \frac{\pi}{2}$, pentru orice $x > 0$. Din continuitatea funcţiei θ rezultă că imaginea sa este intervalul $\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem, apoi:

$$\theta''(x) = \frac{\pi(x - \operatorname{arctg} x)}{(x^2+1)^2 \operatorname{arctg}^3 x}, \quad x > 0.$$

Din inegalitatea binecunoscută $\operatorname{arctg} x < x$, pentru orice $x > 0$, obţinem $\theta''(x) > 0$, oricare ar fi $x > 0$, deci funcţia θ este convexă pe $(0,\infty)$. În sfârşit, prima limită de la (4) se calculează pornind de la relaţia (5) prin regula lui *l'Hospital*, iar cea de a două limită se obţine în mod direct. ∎

Teorema următoare evidenţiază faptul remarcabil că funcţia arctg admite o *cea mai bună încadrare omografică condiţionată* şi un *cel mai fin majorant omografic* pe intervalul $(0,\infty)$.

Teorema 1. 1. *Următoarele inegalităţi asigură cea mai bună încadrare omografică condiţionată a funcţiei arctg pe intervalul* $(0,\infty)$:

$$\frac{\frac{\pi}{2}x}{x + \frac{\pi}{2}} < \operatorname{arctg} x < \frac{\frac{\pi}{2}x}{x + \frac{2}{\pi}}, \quad \forall\, x > 0. \tag{6}$$

2. *Funcţia* $\widetilde{\omega} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, *definită prin:*

$$\widetilde{\omega}(x) = \frac{\frac{\pi}{2}x}{x + \frac{2}{\pi}}, \quad x > 0,$$

reprezintă cel mai fin majorant omografic al funcţiei arctg *pe* $(0,\infty)$.

3. *Funcţia* arctg *nu admite un cel mai mic majorant omografic pe* $(0,\infty)$.

Demonstraţie. 1. Conform lemei 2 avem $\frac{2}{\pi} < \theta(x) < \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x > 0$. Dar:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\frac{\pi}{2}x}{x + \theta(x)}, \quad x > 0.$$

Astfel, inegalităţile (6) sunt demonstrate. Fie ω un majorant (respectiv minorant) omografic condiţionat al funcţiei arctg pe intevalul $I = (0, \infty)$. Din condiţionarea la extremităţi impusă prin definiţia 3, deducem că ω este de forma următoare:

$$\omega(x) = \frac{\frac{\pi}{2}\, x}{x + c}, \quad x > 0,$$

unde c este o constantă strict pozitivă. Atunci $\omega \geq \operatorname{arctg}$ dacă şi numai dacă $c \leq \theta(x)$, pentru orice $x > 0$, ceea ce este echivalent cu $c \leq \frac{2}{\pi}$ şi respectiv $\omega \leq \operatorname{arctg}$, dacă şi numai dacă $c \geq \theta(x)$, oricare ar fi $x > 0$, ceea ce este echivalent cu $c \geq \frac{\pi}{2}$. Atunci marginile omografice indicate de relaţia (6) reprezintă cel mai mare minorant omografic condiţionat şi respectiv cel mai mic majorant omografic condiţionat pentru funcţia arctg pe intervalul $(0, \infty)$.

2. Pentru $t > 0$ avem:

$$\int_0^t (\widetilde{\omega}(x) - \operatorname{arctg} x)\, \mathrm{d}x = t\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right) + \ln \frac{\sqrt{t^2+1}}{t + \frac{2}{\pi}} + \ln \frac{2}{\pi}.$$

Dar:

$$\lim_{t\to\infty} t\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right) = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{t\to\infty} \ln \frac{\sqrt{t^2+1}}{t + \frac{2}{\pi}} = 0.$$

Atunci:

$$\|\widetilde{\omega} - \operatorname{arctg} x\| = \lim_{t\to\infty} \int_0^t (\widetilde{\omega}(x) - \operatorname{arctg} x)\, \mathrm{d}x = \ln \frac{2e}{\pi},$$

deci avem $\|\widetilde{\omega} - \operatorname{arctg}\| < \infty$. Fie ω un majorant omografic arbitrar al funcţiei arctg,

$$\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x > 0,$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, $\gamma\delta \geq 0$ şi $\gamma^2 + \delta^2 > 0$. Este necesar să analizăm trei situaţii.

Cazul i) $\gamma = 0$. Atunci $\alpha\delta \neq 0 = \beta\gamma$. Din condiţia $\omega(x) \geq \operatorname{arctg} x$, pentru orice $x > 0$, rezultă $\frac{\alpha}{\delta} > 0$. În acest caz obţinem $\lim\limits_{x\to\infty} (\omega(x) - \operatorname{arctg} x) = \infty$, de unde rezultă $\|\omega - \operatorname{arctg} x\| = \infty$.

Cazul ii) $\gamma \neq 0$ *şi* $\alpha/\gamma > \pi/2$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} (\omega(x) - \operatorname{arctg} x) = \alpha/\gamma - \pi/2 > 0$. Obţinem de asemenea $\|\omega - \operatorname{arctg}\| = \infty$.

Cazul iii) $\gamma \neq 0$ *şi* $\alpha/\gamma \leq \pi/2$. Trecând la limită la ∞ în inegalitatea $\omega(x) \geq \operatorname{arctg} x$, pentru orice $x > 0$, obţinem $\alpha/\gamma \geq \pi/2$. Rezultă $\alpha/\gamma = \pi/2$, deci funcţia ω poate fi reprezentată sub forma:

$$\omega(x) = \frac{\frac{\pi}{2}\, x + a}{x + b}, \quad x > 0,$$

cu $b \geq 0$ şi $a \neq \frac{\pi}{2} b$. Din ipoteză obţinem $\lim\limits_{x \searrow 0} \omega(x) \geq \lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{arctg} x$, de unde $a \geq 0$. De asemenea, vom arăta, prin reducere la absurd, că are loc inegalitatea $b \leq \frac{2}{\pi}(a+1)$. Să presupunem $b > \frac{2}{\pi}(a+1)$. Fie $\Delta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\Delta(x) = \omega(x) - \operatorname{arctg} x$. Avem:

$$\Delta'(x) = \frac{\left(\frac{\pi}{2} b - a - 1\right) x^2 - 2bx + \left(\frac{\pi}{2} b - a - b^2\right)}{(x+b)^2(x^2+1)}, \quad x > 0.$$

Cum $\frac{\pi}{2} b - a - 1 > 0$, există $x_0 \geq 0$ astfel ca $\Delta'(x) > 0$, pentru orice $x \in (x_0, \infty)$, deci Δ este strict crescătoare pe intervalul (x_0, ∞). Dar $\lim\limits_{x \to \infty} \Delta(x) = 0$. Rezultă $\Delta(x) < 0$, oricare ar fi $x > x_0$, sau $\omega(x) < \operatorname{arctg}(x)$, pentru orice $x > x_0$, ceea ce constituie o contradicţie. Avem deci $b \leq \frac{2}{\pi}(a+1)$. Atunci:

$$\operatorname{arctg} x \leq \widetilde{\omega}(x) \leq \frac{\frac{\pi}{2} x + a}{x + \frac{2}{\pi}(a+1)} \leq \omega(x), \quad \forall\, x > 0.$$

Rezultă $\|\widetilde{\omega} - \operatorname{arctg}\| \leq \|\omega - \operatorname{arctg}\|$. Astfel, $\widetilde{\omega}$ este cel mai fin majorant omografic al funcţiei arctg pe $\mathbb{R}_+^*$.

3. Presupunem, prin reducere la absurd, că arctg ar admite un cel mai mic majorant omografic $\overline{\omega}$. Atunci $\operatorname{arctg} \leq \overline{\omega} \leq \widetilde{\omega}$. Dacă există $x_0 > 0$ astfel ca $\overline{\omega}(x_0) < \widetilde{\omega}(x_0)$, atunci obţinem $\|\overline{\omega} - \operatorname{arctg}\| < \|\widetilde{\omega} - \operatorname{arctg}\|$, ceea ce constituie o contradicţie. Avem deci $\overline{\omega} = \widetilde{\omega}$. Considerăm funcţia:

$$\omega_0(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad x > 0.$$

Constatăm cu uşurinţă că ω_0 este un majorant al funcţiei arctg. Atunci, prin presupunerea făcută, avem $\widetilde{\omega} \leq \omega_0$. Dar:

$$\omega_0(x) < \widetilde{\omega}(x),\ \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi^2 - 8}{\pi(4-\pi)}\right),$$

ceea ce constituie o contradicţie. ■

Remarcă. Din monotonia funcţiei θ deducem că are loc inegalitatea dublă:

$$\frac{\frac{\pi}{2} x}{x + \theta(u+0)} < \operatorname{arctg} x < \frac{\frac{\pi}{2} x}{x + \theta(v)}, \quad \forall\, x \in (u, v) \subset (0, \infty). \tag{7}$$

Imparitatea funcţiei arctg permite extinderea inegalităţilor (6) la intervalul $(-\infty, 0)$.

Corolarul 1. *Are loc inegalitatea dublă:*

$$\frac{\frac{\pi}{2} x}{\frac{2}{\pi} - x} < \operatorname{arctg} x < \frac{\frac{\pi}{2} x}{\frac{\pi}{2} - x}, \quad \forall\, x < 0. \tag{8}$$

De asemenea, pe baza monotoniei stricte a funcţiei tg pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, relaţia (1) conduce, prin „inversare“, la încadrarea funcţiei tg pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Apoi, prin imparitate, se obţine încadrarea funcţiei tg pe $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Corolarul 2. *Funcţia* tg *admite următoarele încadrari omografice:*

$$\frac{\frac{2}{\pi}\,t}{\frac{\pi}{2} - t} < \operatorname{tg} t < \frac{\frac{\pi}{2}\,t}{\frac{\pi}{2} - t}, \quad \forall\, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}\,t}{\frac{\pi}{2} + t} < \operatorname{tg} t < \frac{\frac{2}{\pi}\,t}{\frac{\pi}{2} + t}, \quad \forall\, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right). \tag{10}$$

Pornind de la inegalităţile evidenţiate anterior, obţinem majoranţi şi minoranţi raţionali ai funcţiilor trigonometrice sin şi cos.

Propoziţia 1. *Au loc următoarele inegalităţi trigonometrice*:

$$\sin t \geq \frac{2t(\pi - t)}{(\pi - t)^2 + t^2}, \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{11}$$

$$\sin t \leq \frac{2t(\pi - t)}{\frac{2}{\pi}\,(\pi - t)^2 + \frac{\pi}{2}\,t^2}, \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{1 + \pi/2}\right] \tag{12}$$

$$\frac{\frac{2}{\pi}\,(\pi - t)^2 - \frac{\pi}{2}\,t^2}{\frac{2}{\pi}\,(\pi - t)^2 + \frac{\pi}{2}\,t^2} \leq \cos t \leq \frac{(\pi - t)^2 - t^2}{(\pi - t)^2 + t^2}, \qquad \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{13}$$

Demonstraţie. Constatăm, pentru început, că avem $\theta(1) = 1$. Atunci, din inegalitatea (7) rezultă:

$$\frac{\frac{\pi}{2}\,x}{x + \frac{\pi}{2}} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\frac{\pi}{2}\,x}{x + 1}, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

Ca urmare, utilizând monotonia funcţiei tg, obţinem:

$$\frac{t}{\pi - t} \leq \operatorname{tg} \frac{t}{2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}\,t}{\pi - t}, \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{14}$$

Să observăm însă că funcţia $h(z) = \dfrac{2z}{1 + z^2}$ este strict crescătoare pe $[0, 1]$.

Atunci din inegalităţile (14), conform relaţiei trigonometrice $\sin t = \dfrac{2 \operatorname{tg} t/2}{1 + \operatorname{tg}^2 t/2}$, obţinem inegalităţile (11) şi (12). Din relaţia (14), pe baza monotoniei descrescătoare a funcţiei $k(z) = \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}$ pe $[0, \infty)$ şi a identităţii trigonometrice $\cos t = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 t/2}{1 + \operatorname{tg}^2 t/2}$, obţinem relaţia (13). ■

3. Aproximarea omografică de ordinul 2

Pentru a rafina încadrarea (6) a funcţiei arctg, vom proceda la încadrarea omografică optimală condiţionată a funcţiei θ pe intervalul $(0,\infty)$.

Teorema 2. *Următoarea dublă inegalitate reprezintă cea mai bună încadrare omografică condiţionată a funcţiei θ pe intervalul* $(0,\infty)$*:*

$$\frac{\frac{\pi^2-4}{4}x+\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi(\pi^2-4)}{8}x+1} < \theta(x) < \frac{\frac{4}{\pi^2-4}x+\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\pi^2-4}x+1}, \quad \forall\, x>0. \tag{15}$$

Relaţia (15) este echivalentă cu următoarea încadrare de ordin 2 a funcţiei arctg pe intervalul $(0,\infty)$:

$$\frac{\frac{\pi}{2}x^2+\frac{\pi^2-4}{4}x}{x^2+\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2-4}{4}} < \operatorname{arctg} x < \frac{\frac{\pi^2-4}{4}\cdot\frac{\pi}{2}x^2+x}{\frac{\pi^2-4}{4}x^2+\frac{\pi}{2}x+1}, \ x>0. \tag{16}$$

Demonstraţie. Pentru comoditatea redactării demonstraţiei, vom conveni să notăm $r=\frac{\pi}{2}$. Vom observa la început că $r\in(1,2)$ şi $r^2\in(2,3)$. Definim funcţia $\theta_1:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ prin

$$\theta_1(x)=\frac{r-\theta(x)}{x\,(r\theta(x)-1)}, \quad x>0. \tag{17}$$

Conform lemei 2, $\lim\limits_{x\searrow 0}\theta(x)=r$, $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=r^{-1}$ şi θ este strict descrescătoare, deci funcţia θ_1 este corect definită şi strict pozitivă pe $(0,\infty)$. Apoi, prin aplicarea regulii lui *l'Hospital* şi a relaţiilor (4) şi (5), obţinem:

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{r-\theta(x)}{x}=\lim_{x\searrow 0}(-\theta'(x))=1$$

şi:

$$\lim_{x\to\infty}x\,(r\theta(x)-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{r\theta(x)-1}{x^{-1}}=r\lim_{x\to\infty}\frac{\theta'(x)}{-x^{-2}}=$$
$$=r\lim_{x\to\infty}\frac{\theta''(x)}{2x^{-3}}=r^2\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^{-1}\operatorname{arctg}x}{(1+x^{-2})^2\operatorname{arctg}^3 x}=\frac{1}{r}.$$

Rezultă:

$$\lim_{x\searrow 0}\theta_1(x)=\lim_{x\searrow 0}\frac{r-\theta(x)}{x}\cdot\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{r\theta(x)-1}=\frac{1}{r^2-1}$$

şi respectiv:

$$\lim_{x\to\infty}\theta_1(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\,(r\theta(x)-1)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{r-\theta(x)}{1}=r^2-1.$$

Vom demonstra acum inegalitatea dublă:

$$\frac{1}{r^2-1}<\theta_1(x)<r^2-1, \quad \forall\, x>0, \tag{18}$$

ceea ce este echivalent cu afirmaţia că funcţia continuă θ_1 are imaginea:

$$\left(\frac{1}{r^2-1}, r^2-1\right).$$

Întrucât avem $\theta(x) = \dfrac{x\theta_1(x)+r}{rx\theta_1(x)+1}$, $x>0$, iar funcţia $\varphi(z) := \dfrac{xz+r}{rxz+1}$, cu $x>0$ fixat, este strict descrescătoare în variabila $z \in (0,\infty)$, relaţia (18) este echivalentă cu încadrarea (15) din enunţul teoremei. Însă, pe baza relaţiei $\operatorname{arctg} x = \dfrac{rx}{x+\theta(x)}$, $x>0$, încadrarea (15) a funcţiei θ este echivalentă cu încadrarea (16) a funcţiei arctg, pe care o scriem convenţional:

$$\frac{rx^2+(r^2-1)x}{x^2+rx+r^2-1} < \operatorname{arctg} x < \frac{r(r^2-1)x^2+x}{(r^2-1)x^2+rx+1}, \ \forall\, x>0.$$

Pentru a dovedi inegalităţile de mai sus, considerăm funcţiile $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{rx^2+(r^2-1)x}{x^2+rx+r^2-1}, \qquad g(x) = \frac{r(r^2-1)x^2+x}{(r^2-1)x^2+rx+1} - \operatorname{arctg} x.$$

Avem:

$$f'(x) = \frac{x^2\left[(r^2-1)(4-r^2) - 2r(r^2-2)x\right]}{(x^2+1)(x^2+rx+r^2-1)^2},$$

$$g'(x) = \frac{x\left[2r(r^2-2) - (r^2-1)(4-r^2)x\right]}{(x^2+1)\left[(r^2-1)x^2+rx+1\right]^2}.$$

Rezultă că f este strict crescătoare pe $\left(0, \dfrac{(r^2-1)(4-r^2)}{2r(r^2-2)}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[\dfrac{(r^2-1)(4-r^2)}{2r(r^2-2)}, \infty\right)$, iar g este strict crescătoare pe $\left(0, \dfrac{2r(r^2-2)}{(r^2-1)(4-r^2)}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[\dfrac{2r(r^2-2)}{(r^2-1)(4-r^2)}, \infty\right)$. Cum însă f şi g au limite nule în origine şi la infinit, deducem $f(x), g(x) > 0$, pentru orice $x>0$. Astfel, inegalităţile (16), (15) şi (18) sunt dovedite.

Rămâne să probăm optimalitatea în sens condiţionat a încadrării omografice (15). Notăm $\overline{\omega} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\overline{\omega}(x) = \dfrac{(r^2-1)^{-1}x+r}{r(r^2-1)^{-1}x+1}$, majorantul omografic condiţionat dat de relaţia (15). Fie ω un alt majorant omografic condiţionat al funcţiei θ. Atunci $\lim\limits_{x\searrow 0} \omega(x) = r$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \omega(x) = r^{-1}$. Rezultă că ω este de forma $\omega(x) = \dfrac{cx+r}{crx+1}$, unde c este o constantă pozitivă. Atunci, conform reprezentării lui θ în raport cu θ_1, a relaţiei (18) şi a monotoniei funcţiei φ, obţinem:

$$\omega \geq \theta \ \Leftrightarrow\ c \leq \theta_1 \ \Leftrightarrow\ c \leq \frac{1}{r^2-1} \ \Leftrightarrow\ \omega \geq \overline{\omega}.$$

Rezultă că $\overline{\omega}$ este cel mai bun majorant omografic condiţionat al funcţiei θ. Analog demonstrăm că minorarea lui θ dată de relaţia (15) este cea mai bună minorare omografică condiţionată a funcţiei θ.

Astfel teorema este demonstrată. ■

Corolar. *Din* (16) *se obţine următoarea încadrare a funcţiei* tg:

$$\frac{rt-1+\sqrt{(rt-1)^2+4t(r^2-1)(r-t)}}{2(r^2-1)(r-t)} < \operatorname{tg} t <$$

$$< \frac{rt+1-r^2+\sqrt{(rt+1-r^2)^2+4t(r^2-1)(r-t)}}{2(r-t)}, \quad \forall\, t \in (0,r), \tag{19}$$

unde $r = \dfrac{\pi}{2}$.

Aproximarea omografică optimală a funcţiei θ_1, funcţie a cărei imagine este intervalul $\left(\dfrac{1}{r^2-1}, r^2-1\right)$ va conduce la o aproximare de ordinul 3 pentru funcţia arctg. Procedelul indicat în lucrare poate astfel continua.

4. Comentarii bibliografice. Trebuie remarcat faptul că, în ultimii ani, studiul inegalităţilor a luat o amploare deosebită, stimulat mai ales de circulaţia informaţiei matematice pe cale electronică. În legătură cu problematica încadrării funcţiei tangentă, prezentăm rezultatul remarcabil datorat lui *M. Becker* şi *E. I. Stark* (1978):

$$\frac{8t}{\pi^2-4t^2} < \operatorname{tg} t < \frac{\pi^2 t}{\pi^2-4t^2}, \quad \forall\, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

sau, echivalent:

$$\frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}x^2+\frac{\pi^4}{64}}-\frac{\pi^2}{8}}{x} < \operatorname{arctg} x < \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}x^2+1}-1}{x}, \quad \forall\, x > 0.$$

Remarcăm faptul că încadrarea de mai sus este mai fină decât încadrarea omografică (1), dar nu este mai bună decât încadrarea „de ordinul 2" dată de relaţia (15). Această ultimă observaţie se bazează pe constatarea că limita în origine a majorantului *Becker-Stark* este $\dfrac{\pi^2}{8} > 1$, în timp ce limita în origine a majorantului indicat de relaţia (15) este 1. Menţionăm de asemenea că, într-o lucrare recentă, *C.-P. Chen şi F. Qi* (2004) ameliorează (prin utilizarea rafinată a numerelor lui Bernoulli şi Euler) rezultatul lui *M. Becker* şi *E. I. Stark*.

Bibliografie

[1] M. Becker, E. L. Stark, *On a hierachy of quolynomial inequalities for tan x*, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. **602-633** (1978), pp. 133-138.

[2] C.-P. Chen, F. Qi, *Inequalities of some trigonometric functions*, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. **15** (2004), pp. 71-78.

[3] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiză matematică*, Vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[4] C. P. Niculescu, *An Introduction to Mathematical Analysis*, Editura Universitaria, Craiova, 2005.

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Transilvania din Braşov

Constante de tip Euler generalizate

de Andrei Vernescu

Abstract

In this note the author surveys some results about generalized *Euler*'s constants and makes some historical remarks concerning this topic.

Key words: *Euler*'s (generalized) constants, *Stieltjes* constants.

M.S.C.: 01-99, 40A25

1. Fie un număr real $s > 0$, fixat. Considerând seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, este binecunoscut că:

(a) dacă $s \in (1, \infty)$, atunci seria este convergentă[1)];

(b) dacă $s \in (0, 1]$, atunci seria are suma ∞.

Utilizând notaţiile uzuale $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ şi $H_n = \zeta_n(1)$, reamintim că au loc relaţiile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_n(s)}{n^{1-s}/(1-s)} = 1 \quad (s \in (0,1)), \tag{1}$$

cunoscute deja de *Euler*[2)] şi care arată echivalenţele asimptotice:

$$H_n \sim \ln n; \qquad \zeta_n(s) \sim \frac{n^{1-s}}{1-s} \quad (s \in (0,1).^{3)} \tag{2}$$

Dar faptul că limita raportului a două şiruri care tind către ∞ este egală cu 1 nu asigură că limita diferenţei, dacă există, este finită, după cum se poate constata din exemple triviale de tipul $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1$, cât şi din cel netrivial al formulei lui *Stirling* $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$, unde $\lim_{n\to\infty} \left(n! - n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right) = \infty$.[4)]

Euler a aprofundat situaţia legată de relaţiile (1) şi (2), arătând că limitele:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \tag{3}$$

[1)] Suma acestei serii convergente defineşte funcţia zeta a lui *Riemann* de variabilă reală, care, extinsă la variabila complexă, joacă un rol important în teoria analitică a numerelor. (N.A.)

[2)] Astăzi, obţinerea lor este imediată, de exemplu, cu ajutorul lemei lui *Stolz-Cesàro*. *Euler* a folosit altă metodă, bazată pe ceea ce se numeşte astăzi formula de însumare a lui *Euler-MacLaurin*. (N.A.)

[3)] Reamintim că $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ sunt asimptotic echivalente (notat $a_n \sim b_n$) dacă există $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$, finită şi nenulă. Deşi primele definiţii sistematice din domeniul analizei asimptotice au fost introduse în 1886 de către *Stieltjes* şi *Poincaré* şi completate de *Landau*, se admite în mod unanim că *Euler* a fost un precursor (a se vedea monografiile lui *Van der Corput*, *De Bruijn*, *Copson*, *Erdély*). (N.A.)

[4)] Relaţia se obţine cu uşurinţă din partea stângă a inegalităţii:

$$\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \exp\left(1/(12n+1)\right) < n! < \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \exp\left(1/(12n)\right). \text{ (N.A.)}$$

şi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}-\frac{n^{1-s}}{1-s}\right) \tag{4}$$

există şi sunt finite; limita (3) se numeşte constanta lui *Euler* (sau încă a lui *Euler-Mascheroni*) şi se notează γ sau C. Mai mult, *Euler* a arătat că, în anumite condiţii, pentru o funcţie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right) \tag{5}$$

există şi este finită; limitele (4) şi (5) se numesc constantele de tip *Euler* generalizate.

2. În secolul al XIX-lea s-a mers mai departe cu generalizarea constantelor de tipul celor ale lui *Euler*, extinzându-se nu numai funcţia f, ci şi intervalul de integrare iniţial. Astfel, s-au definit constantele:

$$\gamma(n_0,f)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right)-\int_{n_0}^{n} f(x)\mathrm{d}x\right) \quad (n_0\in\mathbb{N}^*). \tag{6}$$

Câteva din aceste constante sunt prezentate în tabelul următor.

Nr. crt	n_0	$f(x)$	$\gamma(n_0,f)$
1	1	$1/x$	$0,5772156649\ldots=\gamma_0=\gamma$
2	2	$1/\ln x$	$0,8019254372\ldots$
3	2	$1/(x\ln x)$	$0,4281657248\ldots$
4	1	$1/x^s$	$\zeta(s)+1/(1-s)$
5	1	$1/\sqrt{x}$	$0,5396454911\ldots=\zeta(1/2)+2$
6	1	$(\ln x)/x$	$-0,0728158454\ldots=\gamma_1$
7	1	$(\ln x)^2/x$	$-0,0096903631\ldots=\gamma_2$
8	1	$(\ln x)^3/x$	$0,0020538344\ldots=\gamma_3$
9	1	$(\ln x)^4/x$	$0,0023253700\ldots=\gamma_4$
10	1	$(\ln x)^5/x$	$0,0007933238\ldots=\gamma_5$

La cea de a patra constantă, $\zeta(s)$ este considerată în sensul prelungirii analitice (prin intermediul funcţiei zeta a lui *Riemann*, de variabilă complexă $s\mapsto\zeta(s)$, cu $s=\sigma+it$, $\mathrm{Re}(s)=\sigma>1$, care, după definirea sa în semiplanul $\mathrm{Re}(s)>1$, prin egalitatea $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, se prelungeşte analitic în tot planul complex, cu excepţia polului de ordinul întâi $s=1$ şi astfel capătă sens $\zeta(s)$ cu $s\in(0,1)\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$). Se obţin astfel constantele $\zeta(s)+\dfrac{1}{1-s}$ (a se vedea şi [4] pp. 55-56 şi 249-257). În particular, $\zeta\left(\dfrac{1}{2}\right)$ de la cea de a cincea constantă este, de asemenea, considerată în sensul explicat anterior.

În cazul $n_0 = 1$ şi $f(x) = \dfrac{(\ln x)^r}{x}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ se obţin cele mai importante constante de tip Euler generalizate, notate γ_r, anume:

$$\gamma_r = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln k)^r}{k} - \frac{(\ln n)^{r+1}}{r+1}\right) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Acestea se numesc constantele lui *Stieltjes* şi importanţa lor constă în faptul că ele intervin în expresiile coeficienţilor dezvoltării în serie *Laurent* a funcţiei ζ într-o vecinătate (din $\mathbb{C}$) a polului simplu $z_0 = 1$, anume:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n(z-1)^n.$$

Faptul că aceste constante erau binecunoscute în secolul al XIX-lea se poate constata şi consultând periodicul „L'Intermédiaire des mathématiciens", vol. IV, unde, la pagina 27, este scris „Il est facile de démontrer que l'expression:

$$\log\log n - \left(\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{n\log n}\right),$$

croissante avec n, tend vers une limite finie et determinée lorsque n augumente indéfiniment."

De asemenea, convergenţa constantelor lui *Euler* generalizate a fost extinsă şi pentru funcţiile cu valori complexe, de către *Hardy* (a se vedea [13], [14], pp. 517-518, [26], pag. 53, citat şi în [29], pag, 107 precum şi [18], pp. 64-67).

3. Prezentarea expunerii de până acum, cât şi a aprofundării care va urma, are, în afară de interesul propriu-zis al problemei, şi o motivaţie secundară, punctuală. Anume, în monografia [29], reamintind pentru şirul de termen general $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ inegalitatea originală $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < a_n - a < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, cu $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ (din [27], 1991), am menţionat că, de fapt, convergenţele de tipul (4) erau cunoscute mai demult, înaintea lui *Ioachimescu*, care a considerat doar un caz particular, anume cazul $s = \frac{1}{2}$. În [5], [6], [6'], nedispunându-se probabil de bibliografia necesară şi doar speculându-se asupra vârstei lui *Hardy* în 1895, precum şi că singurele lucrări citate în această problemă în [29] (ale lui *Verley* şi *Moisotte*) erau ulterioare lui *Ioachimescu*, se contestă cunoaşterea convergenţelor (4) anterior respectatului autor român.

Pentru a stabili cât mai exact realitatea de istorie a matematicii în această privinţă, am procurat câteva lucrări sau extrase care ne-au clarificat pe deplin situaţia. Redăm, pe scurt, o selecţiune din rezultatele obţinute până în prezent.

a) Cartea [15], având ca autor pe *J. Havil*, profesor la Winchester (Marea Britanie) este o monografie de peste 250 de pagini, consacrată exclusiv constantei lui *Euler* şi publicată în prestigioasa editură Princeton University Press. La paginile 117 şi 118 este scris:

„*Euler* (naturally) embraced this idea of generalization and did so considering:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}-\ln n\right)\quad \text{as} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n}f(r)-\int_{1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\right)$$

with $f(x)=\dfrac{1}{x}$ as just one particular positive decreasing function. From this generalized to $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, where $0<\alpha<1$, to produce two divergent components that combine to converge to finite sums – known us *Euler*'s generalized constants“.

(A se vedea şi originalul, *L. Euler* [8], [9], precum şi [12].)

Iată deci că aceste convergenţe erau cunoscute nu numai din secolul al XIX-lea, ci chiar de însuşi *Euler*! Deci afirmaţia noastră din [29] este corectă!

Binecunoscutul matematician francez *Jean Dieudonné* în [7], problema 27, pag. 119, ca şi profesorul german *Karl Knopp* în [18], pp. 64-69 şi în [19] problema 135, pag. 312, tratează echivalenţa asimptotică dintre $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{\alpha}}$ şi $\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $(\alpha\in(0,1))$, ca pe o problemă binecunoscută.

b) Marele matematician indian *S. Ramanujan*, fost profesor la Universitatea din Cambridge, unul dintre cei mai mari descoperitori de formule de după *Euler*, nu numai că a luat în consideraţie constanta definită ca limită a şirului de termen general $a_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$, dar a şi stabilit formula:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\right)=-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots\right)=-1,46035\ldots, \tag{8}$$

care transformă limita în suma unei serii alternate, convergente (pentru al cărei calcul se pot aplica metodele clasice de accelerare a convergenţei). A se vedea [23], cât şi [24], pp. 47-49. Valoarea expresiei din membrul drept, deci a limitei din membrul stâng, coincide cu cea acceptată astăzi şi este în concordaţă cu valoarea $\zeta(1/2)$ menţionată în tabel.

c) După *Ramanujan*, formula (8) a fost extinsă în mod corespunzător pentru celelalte valori ale exponentului $\alpha\in(0,1)$ (prin intermediul prelungirii analitice menţionate), anume:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}-\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=\zeta(\alpha)=\frac{-1}{2^{1-\alpha}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$$

(a se vedea [4] şi [11]).

d) Mai menţionăm că în „Enciclopedy of Mathematics and its applications“, fondată de binecunoscutul matematician american *Gian-Carlo Rota*, în partea destinată constantelor matematice (vol. 94) [11], unde sunt prezentate peste 136 de constante (iar uneori, familii de constante), singura constantă a cărei definire este legată şi de numele unui matematician român este cea definită de către *J. Ewing* şi

C. Foiaş, introdusă în legătură cu relaţia de recurenţă neliniară $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n$, $n \geq 1$, cu $x_1 = a > 0$. Există o unică valoare $x_1 = a$, pentru care şirul $(x_n)_n$ tinde la ∞; pentru toate celelalte valori ale lui a, şirul are o limită finită. Valoarea constantei a fost calculată de către *Clay C. Ross* şi este $a = 1,1874523511\ldots$ (a se vedea [10]).

Totodată, în enciclopedia menţionată, în afară de indicele alfabetic de nume, de 33 de pagini, în care nu apare numele lui *Ioachimescu*, există şi un indice de constante aşezate în ordinea mărimii, de 24 de pagini, în care, în dreptul constantei 0,5396454911... este scris: „$\zeta(1/2) + 2$; with *Euler-Mascheroni* constants".

Aşadar, din nou se confirmă că afirmaţia din [29] este corectă; convergenţele în care se înscrie şirul $(a_n)_n$ erau de mult cunoscute – chiar de la *Euler* – iar numele lui *Ioachimescu* nu se citează în literatura de specialitate universală (străină).

Desigur, avem toată determinarea şi mândria de a evidenţia rezultatele matematicienilor români, iar nerecunoaşterea (chiar temporară!) a unor priorităţi româneşti nu poate decât să ne nemulţumească (a se vedea controversa *Pompeiu-Zoretti* din 1905, tranşată definitiv în favoarea lui *Pompeiu* de abia în 1909 de către *Denjoy* (a se vedea [1], pag. 348).

A. G. Ioachimescu este apreciat ca matematician la justa lui importanţă, dată de valoarea corespunzătoare a operei sale matematice (v. [1], pp. 300-301). În plus, el este respectat cu aleasă recunoştinţă ca fiind unul dintre creatorii Gazetei Matematice, fiind, de asemenea, autorul unei celebre culegeri de probleme de algebră, cât şi pentru faptul că a sprijinit din toată inima pe tinerii matematicieni din epocă, atunci când le era mai necesar (sunt cunoscute situaţiile lui *D. Pompeiu* şi *D. V. Ionescu*). Dar, cum şi în probleme de istorie a matematicii nu se admite drept principiu fundamental decât respectarea strictă a adevărului ştiinţific, trebuie să recunoaştem că, deşi matematicianul nostru a propus în 1895 o problemă foarte frumoasă (asupra căreia a revenit cu o generalizare în [17]), totuşi aceasta se încadra într-o gamă de convergenţe definite încă de *Euler*!

Pentru indicarea sau procurarea unor valoroase resurse bibliografice legate de problematica acestui articol, adresez calde mulţumiri domnilor prof. dr. *D. Andrica*, prof. dr. *S. Gal*, prof. dr. *A. Lupaş*, prof. dr. *C. P. Niculescu*, prof. *M. Trifu*, prof. dr. *B. Vernescu* (S.U.A.), prof. dr. *M. Vuorinen* (Finlanda).

Bibliografie

[1] G. Şt. Andonie, *Istoria matematicii în România*, vol.I, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

[2] D. Andrica, L. Tóth, *Ordinul de convergenţă al unor şiruri de tipul* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, Astra Matematică, vol. 1, nr. 3, pp. 3-7.

[3] D. Andrica, L. Tóth, *Some remarks on Stieltjes constants of the zeta function*, Stud. Cerc. Mat. 43 (1991), pp. 3-9.

[4] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer Verlag, 1976

[5] M. Bătineţu-Giurgiu, *Andrei G. Ioachimescu's Sequence at 110 years*, Octogon Math. Mag. vol 13, no. 2 (october 2005), pp. 1086-1092.

[6] M. Bătineţu-Giurgiu, *On some Famous Sequences*, Octogon Math. Mag. vol 13, no. 2 (october 2005), pp. 1094-1101.

[6′] M. Bătineţu-Giurgiu, *Despre unele şiruri celebre*, Arhimede, nr. 3-4/2005, pp. 10-16. (Este republicarea lucrării [6])

[7] J. Dieudonné: *Calcul infinitésimal*. Éditions Hermann, Paris, 1968 (Ed. a II-a 1980).

[8] L. Euler, *De progressionibus harmonicis observationes*, Comentarii Academiae, Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 7(1734), pp. 150-161.

[9] L. Euler, *Opera omnia*, seria 1, vol. 1, Lausanne, 1748.

[10] J. Ewing, C. Foiaş, *An interesting serendipitous number*, în volumul *Finite versus infinite: Cotribution to on Eternal Dilemma*, Ed. C. Calude and. G. Păun, Springer-Verlag, 2000, pp. 119-126.

[11] S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Cambridge Univ. Press, 2003.

[12] J. W. L. Glaisher, *On the history of Euler's constant*, Messenger of Math., 1 (1872), pp. 25-30.

[13] G. H. Hardy, *Orders of Infinity*, Cambridge Univ. Press, 1911.

[14] G. H. Hardy, *Collected Papers*, vol. 4, Oxford University Press, 1966.

[15] J. Havil, *Gamma; exploring Euler's constant*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2003.

[16] A. G. Ioachimescu, *Problema 16*, Gaz. Mat. vol. I (1895), nr. 2, pag. 39.

[17] A. G. Ioachimescu, *Asupra valorii asimptotice a unei clase de serii divergente*, Gaz. Mat. 6(1900-1901), pag. 7 şi pag. 29.

[18] K. Knopp, *Infinite Sequences and Series*, Dover Publications, Inc. New York, 1989.

[19] K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Dover Publications, Inc. New York, 1956.

[20] W. Leighton, *Remarks on certain Eulerian constants*, Amer. Math. Monthly, 75 (1968), pp. 283-285.

[21] A. Lupaş, *A. Vernescu: Numărul e şi matematica exponenţialei, Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 2004* (recenzie) Gaz. Mat.(Seria A), 23(102) (2005), nr. 3, pp. 311-313.

[22] L. Moisotte, *1850 exercices de mathématiques*, Dunod Université, Ed. Bordas, Paris, 1978.

[23] S. Ramanujan, *On the sum of the square roots of the first n natural numbers*, J. Indian Math. Soc. 7 (1915), pp. 173-175.

[24] S. Ramanujan, *Collected Papers* (edited by G.H.Hardy, P.V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson), Cambridge Univ. Press, 1927.

[25] T. Takasaka, *Note on the generalized Euler' constants*, Math. J. Okayama, Univ., 36 (1994), pp. 29-34.

[26] J. L. Verley, *Asymptotiques Calculs. Dictionnaire des Mathématiques: algèbre, analyse, géométrie*, Enciclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris, 1997, pp. 47-62.

[27] A. Vernescu, *Problema 22401*, Gaz. Mat. 96(1991), nr. 6, pag. 223.

[28] A. Vernescu, *Analiza matematică. vol. I. 440 de probleme cu rezolvări*, ediţia a IV-a, revizuită, Editura Pantheon, Bucureşti, 2001.

[29] A. Vernescu, *Numărul* e *şi matematica exponenţialei*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2004.

[30] A. Vernescu, *On the similar order of convergence of two adjacent sequences related to* $\zeta(1/2)$, WSEAS Transaction on Mathematics ISSUE 12, vol. 5 (Dec. 2006), pp. 1297-1302.

Universitatea Valahia, Catedra de Matematică
Bulevardul Unirii, nr. 18
130082 Târgovişte
avernescu@clicknet.ro

O metodă a lui Liouville de demonstrare a inegalităţilor

de Dorin Mărghidanu

Abstract

The author presents some proofs which are based on a method due to *Liouville* for the arithmetic-geometric mean inequality, for a particular case of *Cauchy-Buniakowski-Schwarz* inequality, for two inequalities of *Weierstrass* and for *Hua*'s inequality.

Keywords: *Liouville*'s method, *Liouville*'s method associated with a inequality, arithmetic-geometric mean inequality, *Weierstrass*'s inequality, *Hua*'s inequality.

M.S.C.: 26D15

1. Introducere. Vom desemna prin termenul de metoda lui *Liouville* o metodă inductiv-analitică de demonstrare a unor inegalităţi ce depind de n argumente – numere reale. Propunem acestă denumire în memoria marelui matematician *Joseph Liouville*, care în 1839, publica în „Journal de mathématiques pures et appliquées“ (numit şi „Journal de Liouville“) , [8], o demonstraţie elegantă a inegalităţii mediilor. Aceasta metodă, de mare valoare euristică, va fi luată drept prototip pentru demonstrarea unor inegalităţi. Mai precis, dacă avem de demonstrat o inegalitate de forma:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq (\geq) G(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{1}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, iar F, G sunt funcţii de n argumente, $F, G : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$, atunci inegalităţii (1) i se asociază o funcţie de o singură variabilă $L : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, în care unul din argumentele $a_k \in \mathbb{I}$, $k = \overline{1, n}$, se înlocuieşte cu variabila x, ca de exemplu:

$$L(x) = F(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) - G(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x),$$

sau:

$$L(x) = F^n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) - G^n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x), \quad \text{etc.}$$

Apoi, dacă prin metode algebrico-analitice se dovedeşte că $L(x) \leq (\geq) 0$, pentru orice $x \in \mathbb{I}$, rezultă în particular şi $L(a_n) \leq (\geq) 0$, adică tocmai inegalitatea (1), de demonstrat.

Funcţia L asociată inegalităţii o vom numi *funcţie* (de tip) *Liouville*.

2. Două demonstraţii pentru inegalitatea mediilor. Vom urmări în continuare două demonstraţii ale inegalităţii mediilor prin metoda lui *Liouville*. Prima dintre ele – de mare rafinament stiinţific – este chiar demonstraţia originală a lui *Liouville* (cu uşoare adaptări şi prelucrări).

Ea a urmat la relativ puţin timp de la demonstraţia prin inducţie „înainte - înapoi“ a lui *Cauchy* [5] (cu bogate referinţe în [2]- [4], [6], [11]).

În cele ce urmează utilizăm notaţiile: pentru $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$:

$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ (media aritmetică);

$G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ (media geometrică)

(sau atunci când nu există posibilitatea de confuzie, simplu A_n sau G_n).

Propoziţia 1 (inegalitatea mediilor, inegalitatea AM-GM, inegalitatea lui *Cauchy*). *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, *atunci are loc inegalitatea*:

$$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstraţia 1 (*Liouville*) ([8], [3], [4]). Pentru $n = 2$, evident. Presupunem adevărată inegalitatea (2), pentru cazul a $n-1$ numere, cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$ $(= a)$ şi o vom demonstra pentru cazul a n numere, cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Considerăm următoarea funcţie *Liouville*, asociată inegalităţii (2):

$$\begin{aligned} L(x) &= A_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) - G_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) = \\ &= \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}\right)^n - a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot x. \end{aligned} \tag{3}$$

Avem:

$$\begin{aligned} L'(x) &= n \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} - a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} = \\ &= A_n^{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) - G_{n-1}^{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{n-1}{n} \cdot A_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + \frac{x}{n}\right]^{n-1} - G_{n-1}^{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}). \tag{4}$$

Cum $L''(x) = \dfrac{n-1}{n} \cdot A_n^{n-2}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) \geq 0$, rezultă că L este funcţie convexă.

Ecuaţia derivată, $L'(x) = 0$, conform cu (4), are rădăcina:

$$\begin{aligned} x' &= n \cdot G_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) - (n-1) \cdot A_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \\ &= n \cdot G_{n-1} - (n-1) \cdot A_{n-1}, \end{aligned}$$

care este abscisa punctului de minim pentru funcţia L. În urma unui calcul de rutină, găsim că acest minim este:

$$L_{\min} = L(x') = (n-1) \cdot G_{n-1}^{n-1}(A_{n-1} - G_{n-1}). \tag{5}$$

Cu ipoteza de inducţie avem:

$$L(x') \geq 0.$$

Deci $L(x) \geq L(x') \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$. În particular $L(a_n) \geq 0$, adică tocmai inegalitatea (2).

Cazul de egalitate în (5) (deci $L_{\min} = 0$) are loc atunci când $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$ $(= a)$, şi este atins când avem:

$$a_n = x' = n \cdot G_{n-1}(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n-1 \text{ ori}}) - (n-1) \cdot A_{n-1}(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n-1 \text{ ori}}) = a,$$

ceea ce încheie complet argumentaţia prin inducţie.

Observaţia 1. În [10], *D. P. Minassian* (probabil fară să ştie de demonstraţia lui *Liouville*) şi *P. S. Bullen*, în [4], consideră ca funcţie (*Liouville*) asociată inegalităţii mediilor, funcţia:

$$f(x) = n^n \cdot [A_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) - G_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x)] = n^n L(x).$$

Observaţia 2. În demonstraţia lui *Liouville*, funcţia asociată este de fapt funcţia *Liouville* pentru inegalitatea $A_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq G_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *Minassian* [10] observă că inegalitatea mediilor scrisă sub acesta formă este adevărată pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nu doar pentru cele pozitive, – impuse de existenţa radicalului – în forma standard !), după cum se poate uşor observa urmărind demonstraţia de mai sus.

Demonstraţia 2 ([1], [9]) este de asemenea o demonstraţie inductiv-analitică.

În aceeaşi ipoteză de inducţie, alegem acum următoarea funcţie *Liouville*, asociată inegalităţii (2): $L : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de:

$$L(x) = n \cdot [A_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) - G_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x)], \tag{6}$$

care se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} L(x) &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x - n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} x} = \\ &= (n-1) \cdot A_{n-1} + x - n \cdot \sqrt[n]{G_{n-1}^{n-1} \cdot x}. \end{aligned}$$

Avem:

$$L'(x) = 1 - n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{G_{n-1}^{n-1}}{\sqrt[n]{\left(G_{n-1}^{n-1} \cdot x\right)^{n-1}}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{G_{n-1}^{n-1}}{x^{n-1}}}.$$

Deci, $L'(x) = 0$ atunci şi numai atunci când $x = G_{n-1}$. Această valoare este abscisa punctului de minim al funcţiei L. Sintetizăm variaţia funcţiei L în tabelul de mai jos:

x	0	$-\ -$	G_{n-1}	$+\ +$	$+\infty$
$L'(x)$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +$	$+$
$L(x)$	$(n-1) \cdot A_{n-1}$	$\searrow$	$(n-1)(A_{n-1} - G_{n-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

Avem, într-adevăr:

$$L(G_{n-1}) = (n-1) \cdot A_{n-1} + G_{n-1} - n \cdot \sqrt[n]{G_{n-1}^{n-1} \cdot G_{n-1}} = (n-1) \cdot (A_{n-1} - G_{n-1}) \geq 0$$

(conform ipotezei de inducţie !). Prin urmare L este pozitivă pe $[0, \infty)$.

Rezultă că şi pentru $a_n \geq 0$ avem $L(a_n) \geq 0$, deci (2).

Egalitate avem dacă $a_n = G_{n-1}$ (în punctul de minim al funcţiei) echivalent cu (folosind ipoteza de inducţie asupra egalităţii) $a_n = \sqrt[n]{a^n}$, deci dacă şi numai dacă $a_n = a$, ceea ce încheie definitiv demonstraţia.

3. O aplicaţie la o inegalitate cunoscută. Următoarea inegalitate este foarte cunoscută şi se cunosc numeroase demonstraţii ale sale. Prezentăm în continuare – în scop exemplificativ – şi o demonstraţie prin metoda *Liouville*.

Propoziţia 2. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$, *atunci*:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2, \tag{7}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstraţie. Luând $a_n = x$ (> 0), considerăm următoarea funcţie *Liouville*, asociată inegalităţii (7): $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de:

$$\begin{aligned} L(x) &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + x) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{x} \right) = \\ &= (S_{n-1} + x) \cdot \left(U_{n-1} + \frac{1}{x} \right), \end{aligned} \tag{8}$$

unde am notat: $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $U_k = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_k}$.

În ipoteza de inducţie $S_{n-1} \cdot U_{n-1} \geq (n-1)^2$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$, avem două posibilităţi de a finaliza demonstraţia.

• **Varianta inductiv - algebrică.** Scriind (8) sub formă echivalentă:

$$L(x) = S_{n-1} \cdot U_{n-1} + 1 + xU_{n-1} + \frac{1}{x} S_{n-1}, \tag{8'}$$

şi folosind inegalitatea mediilor pentru două numere plus ipoteza de inducţie, obţinem:

$$\begin{gathered} L(x) \geq S_{n-1} \cdot U_{n-1} + 1 + 2\sqrt{S_{n-1} \cdot U_{n-1}} = \\ = \left(\sqrt{S_{n-1} \cdot U_{n-1}} + 1 \right)^2 \geq \left(\sqrt{(n-1)^2} + 1 \right)^2 = n^2. \end{gathered}$$

Egalitatea se obţine atunci şi numai atunci când avem $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$ $(= a)$ şi $xU_{n-1} = \dfrac{1}{x} S_{n-1}$, ceea ce este echivalent cu $x^2 = \dfrac{S_{n-1}}{U_{n-1}} = \dfrac{(n-1)a}{(n-1)/a} = a^2$, deci când avem şi $a_n = x = a$.

• **Varianta inductiv - analitică.** Derivând în (8) sau (8′), obţinem,

$$L'(x) = U_{n-1} - \frac{1}{x^2} S_{n-1} = \frac{x^2 U_{n-1} - A_{n-1}}{x^2}.$$

Rădăcina convenabilă a derivatei, $x' = \sqrt{\dfrac{S_{n-1}}{U_{n-1}}}$, este punct de minim pentru funcţia L. Avem deci:

$$\begin{gathered} L_{\min} = L(x') = L\left(\sqrt{\frac{S_{n-1}}{U_{n-1}}} \right) = \left(S_{n-1} + \sqrt{\frac{S_{n-1}}{U_{n-1}}} \right) \cdot \left(U_{n-1} + \sqrt{\frac{U_{n-1}}{S_{n-1}}} \right) = \\ = \left(\sqrt{S_{n-1} \cdot U_{n-1}} + 1 \right)^2, \end{gathered}$$

şi ca mai sus, cu ipoteza de inducţie, rezultă $L(x) \geq L_{\min} \geq n^2$, (oricare ar fi $x \in (0, \infty)$), cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n$.

4. Două inegalităţi ale lui Weierstrass. Următoarele două inegalităţi sunt datorate lui *K. Weierstrass* (v. [11]- p. 210, [2] - p. 92) şi sunt demonstrate de obicei prin inducţia clasică. În continuare vor fi demonstrate prin metoda inductiv-analitică specifică metodei lui *Liouville*.

Propoziţia 3 (inegalităţile lui *Weierstrass*). a) *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, *atunci*:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{9;}$$

b) *dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$, *atunci*:

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{10}$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, inegalităţile se verifică cu egalitate.

a) Cu notaţiile $P_m := \prod_{k=1}^{m}(1+a_k)$, $S_m := \sum_{k=1}^{m} a_k$ şi $a_n = x$, considerăm următoarea funcţie *Liouville* asociată inegalităţii (9):

$L : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $L(x) = P_{n-1} \cdot (1+x) - (S_{n-1} + x)$.

Avem $L'(x) = P_{n-1} - 1 \geq 0$, deci funcţia L este crescătoare, adică pentru orice $x \geq 0$, avem $L(x) \geq L(0) = P_{n-1} - S_{n-1} \geq 1$ (cu ipoteza de inducţie). În particular şi $L(a_n) \geq 1$, deci are loc inegalitatea (9).

b) Cu notaţiile, $R_m := \prod_{k=1}^{m}(1-a_k)$, $S_m := \sum_{k=1}^{m} a_k$ şi $a_n = x$, considerăm acum următoarea funcţie *Liouville* asociată inegalităţii (10):

$L : [0,1] \to \mathbb{R}$, $L(x) = R_{n-1} \cdot (1-x) + (S_{n-1} + x)$,

pentru care avem $L'(x) = -R_{n-1} + 1 \geq 0$. Rezultă că funcţia L este crescătoare, deci pentru orice $x \geq 0$, avem $L(x) \geq L(0) = R_{n-1} + S_{n-1} \geq 1$ (cu ipoteza de inducţie). În particular avem şi $L(a_n) \geq 1$, deci are loc inegalitatea (10).

5. O demonstraţie pentru inegalitatea lui Hua. Foarte interesanta inegalitate a lui *Lo Keng Hua*, descoperită în 1959 (şi cu multiple aplicaţii în teoria numerelor), a suscitat ulterior interesul matematicienilor, cunoscând mai multe demonstraţii şi extinderi (v. [7], [11], [12]). În cele ce urmează vom oferi o demonstraţie prin metoda lui *Liouville*.

Propoziţia 4 (inegalitatea lui *L. K. Hua*). *Dacă* $\alpha, \beta > 0$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *atunci*:

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \left(\beta - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq \frac{\alpha}{\alpha+n} \cdot \beta^2, \tag{11}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \beta/(\alpha+n)$.

Demonstraţie. Luând $a_n = x$ şi notând $S_p := \sum_{k=1}^{p} a_k$, $T_p := \sum_{k=1}^{p} a_k^2$, considerăm funcţia *Liouville* asociată inegalităţii (11): $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$\begin{aligned} L(x) &= \alpha(T_{n-1} + x^2) + (\beta - S_{n-1} - x)^2 = \\ &= (\alpha+1)x^2 - 2(\beta - S_{n-1})x + \alpha T_{n-1} + (\beta - S_{n-1})^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Pentru cazul $n = 1$, avem $L(x) = \alpha \cdot x^2 + (\beta - x)^2$, care are într-adevăr minimul egal cu $\dfrac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \beta^2$ şi se realizeaza pentru $x = a_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+1}$.

Derivând în (12), obţinem: $L'(x) = 2\left[(\alpha+1)x - (\beta - S_{n-1})\right]$. Ecuaţia $L'(x) = 0$ are soluţia $x' = \dfrac{\beta - S_{n-1}}{\alpha+1}$, care este şi abscisa punctului de minim al funcţiei L. Pentru această valoare, avem după calcule simple:

$$L(x') = \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \left[(\alpha+1)T_{n-1} + (\beta - S_{n-1})^2\right]. \tag{13}$$

Aplicând ipoteza de inducţie, $\alpha T_{n-1} + (\beta - S_{n-1})^2 \geq \dfrac{\alpha}{\alpha+n-1} \cdot \beta^2$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = \dfrac{\beta}{\alpha+n-1}$, dar înlocuind α cu $\alpha+1$ în (13), obţinem $L_{\min} = L(x') \geq \dfrac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)+(n-1)} \cdot \beta^2 = \dfrac{\alpha}{\alpha+n} \cdot \beta^2$, cu egalitate atunci şi numai atunci când $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = \dfrac{\beta}{(\alpha+1)+(n-1)} = \dfrac{\beta}{\alpha+n}$.

În aceste condiţii de egalitate, minimul este atins atunci şi numai atunci când avem:

$$a_n = x' = \frac{\beta - S_{n-1}}{\alpha+1} = \frac{\beta - (n-1) \cdot \dfrac{\beta}{\alpha+n}}{\alpha+1} = \frac{\beta}{\alpha+n},$$

ceea ce încheie definitiv demonstraţia prin inducţie.

Într-o maniera similară, se poate demonstra următoarea generalizare a inegalităţii lui *Hua*, dată de către *Wang* în 1992 (vezi [13]).

Propoziţia 5 (inegalitatea lui *Hua-Wang*). a) *Dacă* $\alpha, \beta > 0$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $p > 1$, *atunci*:

$$\alpha^{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \left|\beta - \sum_{i=1}^{n} a_i\right|^p \geq \left(\frac{\alpha}{\alpha+n}\right)^{p-1} \cdot \beta^p; \tag{14}$$

b) *dacă* $\alpha, \beta > 0$, $0 < p < 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, *cu* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq \beta$, *atunci sensul în inegalitatea* (14) *este inversat.*

În ambele cazuri, egalitatea în relaţia (14) *are loc dacă şi numai dacă* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{\beta}{\alpha+n}$.

Cititorul interesat este invitat să încerce metoda lui *Liouville* şi pentru demonstrarea altor inegalităţi.

Bibliografie

[1] L. Aramă, T. Morozan, *Probleme de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti (1964, 1967, 1978).

[2] E.F. Beckenbach & R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1961.

[3] P.S. Bullen, D.S. Mitrinović & P.M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston, 1988.

[4] P.S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2003.

[5] A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de I'Ecole Royale Polytechnique, première partie, Analyse algébrique*, Paris, 1821. (The proof of the inequality of arithmetic and geometric means can be found on pages 457ff).

Online: http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-29058.

[6] G.H. Hardy, J.E. Littlewood & G. Pólya, *Inequalities*, 2-nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, England, 1988.

[7] L.K. Hua, *Additive Primzahlentheorie*, Satz 4, Teubner, Leipzig, (1959). English translation *Additive Theory of Prime Numbers*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1965).
[8] J. Liouville, *Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives*, Journal de mathématiques pures et appliquées: ou recueil mensuel de memoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville, t.4, (1839), pp.493-494, visite online, http://gallica.bnffr/ark:/12148/bpt6k16383z.
[9] D. Mărghidanu, *O demonstraţie inductiv-analitică a inegalităţii mediilor*, R.M.C., nr. 17, an VII, 2006.
[10] D. P. Minassian, *The arithmetic-geometric mean inequality revisited: elementary calculus and non-negative numbers*, Amer. Math. Monthly, 94, (1987), pp.977-978.
[11] D. S. Mitrinović (in cooperation with P. M. Vasić), *Analytic Inequalities*, Band 165, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[12] H. Takagi, T. Miura, T. Kanzo, S.-E. Takahasi, *A reconsideration of Hua's inequality*, Journal of inequalities and applications, Hindawi Publ. Co., no. 1, (2005), pp.15-23.
[13] C.L. Wang, *Lo Keng Hua inequality and dynamic programming*, J. Math. Anal. Appl., 166, no. 2 (1992), pp.345-350.

Colegiul Naţional A. I. Cuza din Corabia
d.marghidan@gmail.com

Generalizări ale noţiunii de punct de optim: Puncte eficiente; puncte slab eficiente şi puncte ideale

de Eugenia Duca şi Dorel I. Duca

Abstract

The author presents a long list of results concerning some generalizations of the notion of optim point (*Pareto* point, *Slater* point etc.).

Key words: optim point, Pareto point, Slater point.
M.S.C.: 58E17

1. Introducere

Dacă dintr-o colectivitate de oameni putem spune imediat care este cel mai înalt, cel mai vârstnic etc., nu putem spune tot la fel de „convinşi“, de exemplu, care este cel mai bun. De ce? Pentru că, în timp ce înălţimea, ori vârsta sunt caracterizate de un număr real, bunătatea nu este caracterizată de un singur număr real; fiecare dintre noi suntem buni în felul nostru, această bunătate ne caracterizează, dar nu este caracterizată de un singur număr real.

Într-o situaţie asemănătoare (din punct de vedere matematic) suntem puşi atunci când dorim să răspundem la întrebarea: Numărul complex i ($\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{i}^2 = -1$) este pozitiv sau negativ? Să ne amintim că un număr complex este caracterizat de două numere reale (partea reală şi partea imaginară) şi nu de un singur număr real.

Să analizăm acum următorul exemplu:

Exemplul 1. *Fie α un plan şi d_1 şi d_2 două drepte conţinute în planul α. Să se determine „cele mai apropiate puncte” $P \in \alpha$, simultan faţă de dreptele d_1 şi d_2.*

În acest context, problema determinării „celor mai apropiate puncte“ $P \in \alpha$, simultan faţă de dreptele d_1 şi d_2, poate fi abordată în cel puţin următoarele trei moduri (interpretări):

1) Să se determine punctele $P \in \alpha$ cu proprietatea că:

$$(d(P, d_1), d(P, d_2)) \leqq (d(Q, d_1), d(Q, d_2)), \quad \forall Q \in \alpha.$$

2) Să se determine punctele $P \in \alpha$ cu proprietatea că nu există puncte $Q \in \alpha$ astfel încât:

$$d(Q, d_1) < d(P, d_1), \quad d(Q, d_2) < d(P, d_2).$$

3) Să se determine punctele $P \in \alpha$ cu proprietatea că nu există puncte $Q \in \alpha$ astfel încât:

$$\begin{cases} d(Q, d_1) < d(P, d_1) \\ d(Q, d_2) \leqq d(P, d_2) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} d(Q, d_1) \leqq d(P, d_1) \\ d(Q, d_2) < d(P, d_2). \end{cases}$$

($d(P, d_1)$ – notează distanţa de la punctul P la dreapta d_1 etc.).

Aceste trei moduri de abordare se pot face pentru că noi dorim punctele „cele mai apropiate“ simultan faţă de două drepte; prin urmare „funcţia“ pe care dorim să o optimizăm (în acest caz să o minimizăm) are valori în $\mathbb{R}^2$ (nu în $\mathbb{R}$): distanţa lui P faţă de d_1 şi faţă de d_2.

În lucrarea de faţă, dorim să lămurim aceste chestiuni, să facem legătura între sintagmele „cele mai apropiate“, „cei mai buni“ etc. şi noţiunea de punct de optim (extrem) al unei funcţii reale convenabil construite. Într-o lucrare ulterioară vom caracteriza punctele „cele mai ...“ - numite *puncte eficiente*, *puncte slab eficiente, puncte ideale* etc. – cu ajutorul derivatelor funcţiilor care apar în formularea problemei.

2. Câteva notaţii şi definiţii

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, relaţia de ordine „$\leqq$“ este totală (completă), adică oricare ar fi numerele reale x şi y avem $x \leqq y$ sau $y \leqq x$. Această proprietate a numerelor reale (cunoscută sub numele de trichotomie) este esenţială pentru definirea noţiunii de punct de optim (extrem) al unei funcţii reale.

Într-adevăr, dacă D este o mulţime nevidă, $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie reală şi S este o submulţime nevidă a lui D, atunci $x_0 \in S$ se numeşte *punct de minim al funcţiei f relativ la S*, dacă:

$$f(x_0) \leqq f(x), \quad \forall x \in S. \tag{1}$$

Relaţia (1) cere ca $f(x_0)$ să se poată compara cu $f(x)$ pentru fiecare x din S.

Relaţia de ordine „pe componente“ care se introduce pe $\mathbb{R}^p$ cu $p \in \mathbb{N}$, $p \geqq 2$, nu este o relaţie de ordine totală. Prin urmare, afirmaţia (1) nu poate fi folosită pentru a defini un „punct de minim“ al funcţiei vectoriale $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ cu $p \in \mathbb{N}$ cu $p \geqq 2$.

Scriem afirmaţia (1) în forma echivalentă:

$$\textit{nu există } \; x \in S \; \textit{ cu proprietatea că } \; f(x) < f(x_0). \tag{2}$$

Afirmaţia (2) ne permite introducerea a cel puţin două noţiuni distincte de „punct de minim" ale unei funcţii vectoriale şi aceasta deoarece relaţia de ordine strictă „<" din $\mathbb{R}$ se poate generaliza la $\mathbb{R}^p$ în cel puţin două moduri distincte (generalizarea este înţeleasă în sensul că dacă $p = 1$, atunci relaţia nouă revine la relaţia „<" din $\mathbb{R}$).

Fie $u = (u_1, \ldots, u_p)$ şi $v = (v_1, \ldots, v_p)$ două puncte din spaţiul $\mathbb{R}^p$. Atunci vom scrie că:

$u \leqq v$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, p\}$ avem $u_j \leqq v_j$;

$u < v$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, p\}$ avem $u_j < v_j$;

$u \leq v$ dacă şi numai dacă $u \leqq v$ şi $u \neq v$.

Evident $u \leq v$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, p\}$ avem $u_j \leqq v_j$ şi există cel puţin un indice $k \in \{1, \ldots, p\}$ cu proprietatea că $u_k < v_k$.

3. Generalizări ale noţiunii de punct de optim

Reamintim noţiunile de punct de optim (extrem) de care avem nevoie în cele ce urmează.

Definiţia 2. *Fie D o submulţime nevidă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie, S o submulţime nevidă a lui D şi $x_0 \in S$. Spunem că x_0 este:*

a) punct de minim al funcţiei f relativ la S, dacă pentru orice $x \in S$ avem $f(x_0) \leqq f(x)$;

b) punct de maxim al funcţiei f relativ la S, dacă pentru orice $x \in S$ avem $f(x) \leqq f(x_0)$;

c) punct de optim (extrem) al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct de minim sau punct de maxim al funcţiei f relativ la S.

Evident, definiţia 2 poate fi reformulată astfel:

Definiţia 3. *Fie D o submulţime nevidă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie, S o submulţime nevidă a lui D şi $x_0 \in S$. Spunem că x_0 este:*

a) *punct de minim al funcţiei f relativ la S, dacă nu există $x \in S$ astfel încât $f(x) < f(x_0)$;*

b) *punct de maxim al funcţiei f relativ la S, dacă nu există $x \in S$ astfel încât $f(x_0) < f(x)$;*

c) *punct de optim al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct de minim sau punct de maxim al funcţiei f relativ la S.*

Ţinând seama de cele precizate mai sus, putem da următoarea definiţie:

Definiţia 4. *Fie D o submulţime nevidă, $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială, S o submulţime nevidă a lui D şi $x_0 \in S$. Spunem că x_0 este:*

a) punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) de minim al funcţiei f relativ la S, dacă nu există $x \in S$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$;

b) punct slab eficient (sau punct Slater, sau punct nedominat strict) de minim al funcţiei f relativ la S, dacă nu există $x \in S$ astfel încât $f(x) < f(x_0)$;

c) punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S, dacă pentru orice $x \in S$ are loc inegalitatea $f(x_0) \leqq f(x)$;

d) punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) de maxim al funcţiei f relativ la S, dacă nu există $x \in S$ astfel încât $f(x_0) \leq f(x)$;

e) punct slab eficient (sau punct Slater, sau punct nedominat strict) de maxim al funcţiei f relativ la S, dacă nu există $x \in S$ astfel încât $f(x_0) < f(x)$;

f) *punct ideal de maxim al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă pentru orice* $x \in S$ *are loc inegalitatea* $f(x) \leqq f(x_0)$;

g) *punct eficient* (*sau punct Pareto, sau punct nedominat*) *al funcţiei* f *relativ la* S*, dacă este punct eficient de minim sau punct eficient de maxim al funcţiei* f *relativ la* S;

h) *punct slab eficient* (*sau punct Slater sau nedominat strict*) *al funcţiei* f *relativ la* S*, dacă este punct slab eficient de minim sau punct slab eficient de maxim al funcţiei* f *relativ la* S;

i) *punct ideal al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă este punct ideal de minim sau punct ideal de maxim al funcţiei* f *relativ la* S.

Exemplul 5. *Fie* α *un plan,* d_1 *şi* d_2 *două drepte distincte conţinute în planul* α *şi* $f : a \to \mathbb{R}^2$ *funcţia definită prin*:

$$f(P) = (d(P, d_1), d(P, d_2)), \text{ oricare ar fi } P \in \alpha.$$

($d(P, d_1)$, *respectiv* $d(P, d_2)$, *notează distanţa de la punctul* P *la dreapta* d_1, *respectiv la dreapta* d_2).

1) *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt concurente, atunci unicul punct eficient de minim al funcţiei* f *relativ la* α *este punctul de intersecţie al dreptelor* d_1 *şi* d_2.

2) *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt paralele, atunci un punct* $P \in \alpha$ *este eficient de minim al funcţiei* f *relativ la* α *dacă şi numai dacă* P *se află în banda determinată de cele două drepte.*

3) *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt concurente, atunci un punct* $P \in \alpha$ *este slab eficient de minim al funcţiei* f *relativ la* α *dacă şi numai dacă* $P \in d_1 \cup d_2$.

4) *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt paralele, atunci mulţimea punctelor slab eficiente de minim ale funcţiei* f *relative la* α *este egală cu mulţimea punctelor eficiente de minim ale funcţiei* f *relative la* α.

5) *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt concurente, atunci unicul punct ideal de minim al funcţiei* f *relativ la* α *este punctul de intersecţie al dreptelor* d_1 *şi* d_2.

6) *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt paralele, atunci funcţia* f *nu are puncte ideale de minim relative la* α.

Teorema 6. *Fie* D *o submulţime nevidă,* S *o submulţime nevidă a lui* D *şi* $f : D \to \mathbb{R}^p$ *o funcţie vectorială. Dacă* $x_0 \in S$ *este punct eficient de minim* (*respectiv de maxim*) *al funcţiei* f *relativ la* S, *atunci* x_0 *este punct slab eficient de minim* (*respectiv de maxim*) *al funcţiei* f *relativ la* S.

Demonstraţie. Demonstraţia este imediată. ■

Observaţia 7. Reciproca teoremei nu este adevărată aşa cum ne arată următorul exemplu:

Exemplul 8. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funcţia definită prin*:

$$f(x) = \left(x^2, 0\right), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

şi $S = [-1, 1]$. *Atunci* $x = 0$ *este unicul punct eficient de minim al funcţiei* f *relativ la* S, *în timp ce orice* $x \in S$ *este punct slab eficient de minim al funcţiei* f *relativ la* S.

Teorema 9. *Fie* D *o submulţime nevidă,* S *o submulţime nevidă a lui* D *şi* $f : D \to \mathbb{R}^p$ *o funcţie vectorială. Dacă funcţia* f *are cel puţin un punct ideal de minim* (*respectiv de maxim*) *relativ la* S, *atunci mulţimea punctelor eficiente* *de minim (respectiv de maxim) ale funcţiei f relative la S coincide cu mulţimea punctelor ideale de minim (respectiv de maxim) ale funcţiei f relative la S.*

Demonstraţie. Vom demonstra teorema numai pentru minim, cazul maxim fiind analog.

Evident orice punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Reciproc, să arătăm că orice punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S. Fie $x_0 \in S$ un punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S (un astfel de punct există prin ipoteză).

Presupunem, prin absurd, că există un punct u care este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S şi care nu este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S. Din faptul că u este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S, avem:

$$f(u) \leqq f(x_0),$$

iar din faptul că u nu este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S deducem că există cel puţin un punct $u_1 \in S$ cu proprietatea că:

$$f(u_1) \leq f(u).$$

Din ultimele două inegalităţi rezultă inegalitatea:

$$f(u_1) \leq f(x_0),$$

care ne spune că x_0 nu este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S; contradicţie. Teorema este demonstrată. ■

Observaţia 10. Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}^p$ nu posedă puncte ideale de minim (respectiv de maxim) relative la mulţimea $S \subseteq D$, nu rezultă numaidecât că ea nu posedă puncte eficiente de minim (respectiv de maxim) relative la S. Există funcţii $f : D \to \mathbb{R}^p$ care nu posedă puncte ideale de minim relative la mulţimea $S \subseteq D$, dar posedă puncte eficiente de minim relative la S (vezi exemplul 5, afirmaţiile 2) şi 6))

Definiţia următoare precizează noţiunea de eficienţă locală:

Definiţia 11. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială, S o submulţime nevidă a lui D şi $x_0 \in S$. Spunem că x_0 este:*

a) *punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) de minim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct eficient de minim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

b) *punct slab eficient (sau punct Slater, sau punct nedominat strict) de minim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

c) *punct ideal de minim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct ideal de minim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

d) *punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) de maxim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct eficient de maxim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

e) *punct slab eficient (sau punct Slater, sau punct nedominat strict) de maxim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct slab eficient de maxim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

f) *punct ideal de maxim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct ideal de maxim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

g) *punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) local al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct eficient de minim local sau punct eficient de maxim local al funcţiei f relativ la S;*

h) *punct slab eficient (sau punct Slater sau punct nedominat strict) local al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct slab eficient de minim local sau punct slab eficient de maxim local al funcţiei f relativ la S;*

i) *punct ideal local al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct ideal de minim local sau punct ideal de maxim local al funcţiei f relativ la S.*

Exemplul 12. *Fie $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funcţia vectorială definită prin:*

$$f(x) = (\sin x, \cos x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

şi $S = [0, 2\pi]$. Atunci:

a) *punctele $x = \pi$ şi $x = 3\pi/2$ sunt puncte eficiente de minim şi puncte slab eficiente de minim ale funcţiei f relative la S;*

b) *punctele $x = 0$, $x = \pi/2$ şi $x = 2\pi$ sunt puncte eficiente de maxim şi puncte slab eficiente de maxim ale funcţiei f relative la S;*

c) *orice $x \in [0, \pi/2[$ este punct eficient de minim local şi punct slab eficient de minim local al funcţiei f relativ la S;*

d) *orice $x \in [0, \pi/2]$ este punct eficient de maxim şi punct slab eficient de maxim al funcţiei f relativ la S;*

e) *orice $x \in [\pi, 3\pi/2]$ este punct eficient de minim şi punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S;*

f) *orice $x \in [\pi, 3\pi/2]$ este punct eficient de maxim local şi punct slab eficient de maxim local al funcţiei f relativ la S;*

g) *punctul $x = 2\pi$ este punct ideal de maxim local al funcţiei f relativ la S;*

h) *funcţia f nu posedă puncte ideale de minim relative la S.*

4. Condiţii suficiente pentru punctele eficiente, punctele slab eficiente şi punctele ideale

Fiind dată o mulţime nevidă D, o funcţie $f : D \to \mathbb{R}^p$ şi o submulţime nevidă S a mulţimii D, determinarea punctelor eficiente (respectiv slab eficiente, ideale) de maxim ale funcţiei f relative la S revine la determinarea punctelor eficiente (respectiv slab eficiente, ideale) de minim ale funcţiei $g = -f$ relative la S, deoarece $x_0 \in S$ este punct eficient (respectiv slab eficient, ideal) de maxim al funcţiei f relativ la S dacă şi numai dacă x_0 este eficient (respectiv slab eficient, ideal) de minim al funcţiei $g = -f$ relativ la S. De aceea este suficient să ne ocupăm numai de determinarea punctelor eficiente (respectiv slab eficiente, ideale) de minim ale unei funcţii.

Teorema 13. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D şi $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. Fie $F : f(D) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că oricare ar fi $u, v \in f(D)$ cu $u \leq v$ avem $F(u) \leqq F(v)$.*

Dacă funcţia $F \circ f : D \to \mathbb{R}$ are un singur punct de minim $x_0 \in S$ relativ la S, atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că punctul de minim x_0 al funcţiei $F \circ f$ relativ la S nu este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S. Atunci există un punct $x_1 \in S$ cu proprietatea că $f(x_1) \leq f(x_0)$. De aici deducem că $x_1 \neq x_0$ şi $F(f(x_1)) \leqq F(f(x_0))$. Aşadar există un punct $x_1 \neq x_0$ astfel încât $(F \circ f)(x_1) \leqq (F \circ f)(x_0)$, ceea ce contrazice unicitatea punctului de minim al funcţiei $F \circ f$ relativ la S. ■

Teorema 14. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D şi $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. Fie $F : f(D) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că oricare ar fi $u, v \in f(D)$ cu $u \leq v$ avem $F(u) \leqq F(v)$.*

Dacă funcţia $F \circ f : D \to \mathbb{R}$ are un singur punct de minim $x_0 \in S$ relativ la S, atunci x_0 este punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teoremele 13 şi 6. ■

Teorema 15. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială şi $a = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ cu $a \geq 0$.*

Dacă funcţia $\varphi = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : D \to \mathbb{R}$ are un singur punct de minim $x_0 \in S$ relativ la S, atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teorema 13 alegând $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin:

$$F(u) = a_1 u_1 + ... + a_p u_p, \text{ oricare ar fi } u = (u_1, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p. \blacksquare$$

Teorema 16. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială şi $a = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ cu $a \geq 0$.*

Dacă funcţia $\varphi = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : D \to \mathbb{R}$ are un singur punct de minim $x_0 \in S$ relativ la S, atunci x_0 este punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teoremele 15 şi 6. ■

Teorema 17. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială şi $k \in \{1, ..., p\}$.*

Dacă funcţia $f_k : D \to \mathbb{R}$ are un singur punct de minim $x_0 \in S$ relativ la S, atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teorema 15, cu $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ ales astfel:

$$a_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad j = k \\ 0, & \text{dacă} \quad j \in \{1, ..., p\} \setminus \{j\}. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Teorema 18. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială şi $k \in \{1, ..., p\}$.*

Dacă funcţia $f_k : D \to \mathbb{R}$ are un singur punct de minim $x_0 \in S$ relativ la S, atunci x_0 este punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teoremele 17 şi 6. ■

Observaţia 19. Unicitatea punctului de minim în teoremele 13 - 18 este esenţială în sensul că dacă punctul de minim x_0 nu este unic, atunci s-ar putea ca x_0 să nu fie punct eficient sau/şi slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S aşa cum ne arată următorul exemplu:

Exemplul 20. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funcţia definită prin:*

$$f(x) = \left(x^4 - 2x^2, x\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Punctul $x = 1$ este punct de minim al funcţiei $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x) = x^4 - 2x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, dar nu este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la $\mathbb{R}$ deoarece:

$$f(-1) = (-1, -1) \leq (-1, 1) = f(1).$$

Evident funcţia f_1 are două puncte de minim ($x = -1$ şi $x = 1$) relativ la $\mathbb{R}$.

Exemplul 21. *La o aplicaţie militară, care se desfăşoară în localităţile L_1 şi L_2 participă 10 tancuri: 4 tancuri în localitatea L_1 şi 6 tancuri în localitatea L_2. Cele 10 tancuri se află în trei unităţi militare UM_1, UM_2, UM_3. Unitatea UM_1 participă la aplicaţie cu 5 tancuri, unitatea UM_2 participă la aplicaţie cu 3 tancuri şi unitatea UM_3 participă la aplicaţie cu 2 tancuri. Distanţele d_{ij} ($i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$) de la unităţile militare UM_1, UM_2, UM_3 la localităţile L_1, L_2 unde se desfăşoară aplicaţia sunt date în tabelul de mai jos:*

Localitatea	L_1	L_2	*Numărul de tancuri disponibile*
UM_1	10	20	5
UM_2	40	60	3
UM_3	10	40	2
Numărul de tancuri necesare	4	6	

Punem problema determinării numărului de tancuri cu care participă unitatea militară UM_j ($j \in \{1,2,3\}$) în localitatea L_i ($i \in \{1,2\}$) astfel încât următoarele condiţii să fie satisfăcute:

a) *costul total al deplasării tancurilor de la unităţile militare UM_1, UM_2, UM_3 la localităţile L_1, L_2 unde se desfăşoară aplicaţia, să fie minim (costul deplasării este a lei pe oră);*

b) *intervalul de timp, de la darea comenzii de plecare a tancurilor de la unităţile militare până în momentul sosirii tuturor tancurilor în localităţile de destinaţie să fie minim (toate tancurile se deplasează cu aceeaşi viteză şi anume b km pe oră).*

Fie $x_{ij} \in \mathbb{N}$ numărul de tancuri cu care participă unitatea militară UM_j ($j \in \{1,2,3\}$) în localitatea L_i ($i \in \{1,2\}$) şi:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Condiţiile problemei conduc la relaţiile:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 5 \\ x_{21} + x_{22} = 3 \\ x_{31} + x_{32} = 2 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4 \\ x_{ij} \in \mathbb{N},\ (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}. \end{cases} \tag{3}$$

Fie S mulţimea matricelor $X \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$ a căror elemente satisfac relaţiile (3). Atunci costul total al deplasării tancurilor este:

$$\begin{aligned} f_1(X) &= ad_{11}x_{11} + ad_{12}x_{12} + ad_{21}x_{21} + ad_{22}x_{22} + ad_{31}x_{31} + ad_{32}x_{32} = \\ &= a\left(10x_{11} + 20x_{12} + 40x_{21} + 60x_{22} + 10x_{31} + 40x_{32}\right), \end{aligned}$$

oricare ar fi $X = (x_{ij}) \in S$.

Intervalul de timp de la darea comenzii de plecare a tancurilor de la unitatea militară până în momentul sosirii tuturor tancurilor în localităţile de destinaţie este:

$$f_2(X) = \max\left\{\frac{d_{ij}}{b} :\ (i,j) \in K\right\}, \quad \forall X = (x_{ij}) \in S,$$

unde:

$$K = \{(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\} :\ x_{ij} > 0\}.$$

În concluzie, problema pusă revine la determinarea punctelor eficiente de minim ale funcţiei $f = (f_1, f_2) : \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ relative la mulţimea S.

Funcţia f_1 are un singur punct de minim relativ la S şi anume:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

cu:

$$f_1\left(X^1\right) = 260a.$$

Funcţia f_2 are două puncte de minim relative la S şi anume:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \overline{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cu:

$$f_2\left(X^2\right) = f_2\left(\overline{X}^2\right) = 40b^{-1}.$$

Avem:

$$f\left(X^1\right) = \left(260a, 60b^{-1}\right), f\left(X^2\right) = \left(270a, 40b^{-1}\right), f\left(\overline{X}^2\right) = \left(290a, 40b^{-1}\right).$$

Evident $\overline{X}^2$ nu este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S. În baza teoremelor 17 şi 18, punctul X^1 este punct eficient de minim şi punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S. De asemenea, uşor se poate constata că punctul X^2 este punct eficient de minim şi punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

În teoremele următoare se renunţă la ipoteza unicităţii punctului de minim.

Teorema 22. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D şi $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. Fie $F : f(D) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că oricare ar fi $u, v \in f(D)$ cu $u \leq v$ avem $F(u) < F(v)$.*

Dacă $x_0 \in S$ este punct de minim al funcţiei $F \circ f : D \to \mathbb{R}$ relativ la S, atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că punctul de minim x_0 al funcţiei $F \circ f$ relativ la S nu este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S. Atunci există un punct $x_1 \in S$ cu proprietatea că $f(x_1) \leq f(x_0)$. De aici deducem că $F(f(x_1)) < F(f(x_0))$. Aşadar există un punct $x = x_1$ astfel încât $(F \circ f)(x_1) < (F \circ f)(x_0)$ ceea ce contrazice ipoteza că x_0 este punct de minim al funcţiei $F \circ f$ relativ la S. Teorema este demonstrată. ■

Teorema 23. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D şi $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. Fie $F : f(D) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că oricare ar fi $u, v \in f(D)$ cu $u \leq v$ avem $F(u) < F(v)$.*

Dacă $x_0 \in S$ este punct de minim al funcţiei $F \circ f : D \to \mathbb{R}$ relativ la S, atunci x_0 este punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teoremele 22 şi 5. ■

O consecinţă importantă a teoremei 22 este următoarea afirmaţie:

Teorema 24. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială şi $a = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$* cu $a > 0$.

Dacă $x_0 \in S$ este punct de minim al funcţiei $\varphi = a_1 f_1 + \ldots + a_p f_p : D \to \mathbb{R}$ relativ la S, atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teorema 22 alegând $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin:

$$F(u) = a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p, \quad \forall\, u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p. \blacksquare$$

Teorema 25. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială şi $a = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$* cu $a > 0$.

Dacă $x_0 \in S$ este punct de minim al funcţiei $\varphi = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : D \to \mathbb{R}$ relativ la S, atunci x_0 este punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teoremele 24 şi 6. ■

Exemplul 26. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin:*

$$f(x) = \left(x^4 - 2x^2, x\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin:

$$\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 24x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $x = -2$ este punct de minim al funcţiei φ relativ la $\mathbb{R}$ deducem, în baza teoremelor 24 şi 25, că $x = -2$ este punct eficient şi punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la $\mathbb{R}$.

Teorema 27. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a mulţimii D şi $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială cu proprietatea că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in S$.*

Dacă $r_1, ..., r_p$ sunt p numere reale strict pozitive şi $x_0 \in S$ este punct de minim al funcţiei:

$$\psi = (f_1)^{r_1} ... (f_p)^{r_p} : D \to \mathbb{R},$$

relativ la S, atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Se aplică teorema 22 cu $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$F(u) = (u_1)^{r_1} ... (u_p)^{r_p}, \text{ oricare ar fi } u = (u_1, ..., u_p) > 0. \blacksquare$$

Dacă notăm cu $E(f;S)$ mulţimea punctelor eficiente de minim ale funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ relative la $S \subseteq D$ şi, pentru fiecare $a = (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ cu $M(f;a,S)$ mulţimea punctelor de minim ale funcţiei $\varphi = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : D \to \mathbb{R}$ relative la S, atunci în baza teoremei 24, avem:

$$\cup\{M(f;a,S) : \ a \in \mathbb{R}^p, \ a > 0\} \subseteq E(f;S). \tag{4}$$

Incluziunea (4) poate fi strictă, aşa cum ne arată următorul exemplu:

Exemplul 28. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funcţia definită prin:*

$$f(x) = \left(-x, x^2\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Uşor se poate constata că:

$$E(f;\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

şi:

$$M(f;a,\mathbb{R}) = \{a_1/(2a_2)\}, \quad \forall\, a = (a_1, a_2) > 0.$$

Se observă că $0 \in E(f;\mathbb{R})$ şi $0 \notin \cup\{M(f;a,S) : a \in \mathbb{R}^2, \ a > 0\}$, prin urmare incluziunea (4) este strictă.

Relativ la punctele ideale putem da următoarea teoremă:

Teorema 29. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială.*

Dacă $x_0 \in S$ este punct de minim al funcţiei $\varphi = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : D \to \mathbb{R}$ relativ la S, oricare ar fi $a = (a_1, \cdots, a_p) \geq 0$, atunci x_0 este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S.

Demonstraţie. Fie $k \in \{1, ..., p\}$ şi $a = (a_1, \cdots, a_p)$ dat de:

$$a_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad j = k \\ 0, & \text{dacă} \quad j \in \{1, ..., p\} \setminus \{j\}. \end{cases}$$

Întrucât x_0 este punct de minim al funcţiei $\varphi = f_k$, deducem că $f_k(x_0) \leqq f_k(x)$, oricare ar fi $x \in S$. Cum $k \in \{1, ..., p\}$ a fost ales arbitrar, obţinem că:

$$f(x_0) \leqq f(x), \quad \forall\, x \in S.$$

Aşadar x_0 este punct ideal de minim al fucţiei f relativ la S.

Reciproca teorema 29 este, de asemenea, adevărată; are loc afirmaţia:

Teorema 30. *Fie D o mulţime nevidă, S o submulţime nevidă a lui D, $f = (f_1, ..., f_p) : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială.*

Dacă $x_0 \in S$ este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S, atunci x_0 este punct de minim al funcţiei $\varphi = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : D \to \mathbb{R}$ relativ la S, oricare ar fi $a = (a_1, \cdots, a_p) \geq 0$.

Demonstraţie. Din faptul că x_0 este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la S, deducem că:

$$f_k(x_0) \leqq f_k(x), \quad \forall\, x \in S, \quad \forall\, k \in \{1, ..., p\}.$$

De aici urmează că, pentru orice $a = (a_1, \cdots, a_p) \geq 0$, avem:

$$\varphi(x_0) = a_1 f_1(x_0) + ... + a_p f_p(x_0) \leqq a_1 f_1(x) + ... + a_p f_p(x) = \varphi(x),$$

oricare ar fi $x \in S$, ceea ce ne arată că x_0 este punct de minim al funcţiei φ relativ la S, oricare ar fi $a = (a_1, \cdots, a_p) \geq 0$. Teorema este demonstrată. ■

Într-o lucrare ulterioară vom da condiţii necesare şi suficiente pentru punctele eficiente, slab eficiente şi ideale ale funcţiilor derivabile.

Bibliografie

[1] D. Andrica, D. I. Duca, I. Purdea, I. Pop, *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2004.

[2] D. I. Duca, E. Duca, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura GIL, Zalău, vol. 1 (1996), vol 2 (1997).

[3] D. I. Duca, E. Duca, *Generalizări ale noţiunii de punct de optim*, Didactica matematicii, **14** (1998), pp. 117-126.

[4] D. I. Duca, E. Duca, *Condiţii necesare şi condiţii suficiente pentru punctele eficiente şi slab eficiente ale funcţiilor derivabile*, Didactica matematicii, **15** (1999), pp. 31-38.

Universitatea Tehnică,
Catedra de Matematică,
400027 Cluj-Napoca,
e-mail: educa@math.utcluj.ro

Universitatea Babeş-Bolyai,
Facultatea de Matematică şi Informatică,
400084 Cluj-Napoca,
e-mail: dorelduca@yahoo.com

Câteva probleme cu şiruri fără epsilon[1)]

DE CRISTINEL MORTICI

Abstract

This note presents 10 problems (some of them proposed at mathematical contests) concerning various aspects of sequences (periodicity, recursion relations, computation of certain terms, monotony).

Key words: sequences, periodicity, recursion relation, monotony.

M.S.C.: 40-99.

1. *Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = [(2+\sqrt{3})^n]$. Să se determine o relaţie de recurenţă pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1}$.*

Cu formula binomului lui *Newton*, rezultă:

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2 \cdot \sum_{2k\leq n} C_n^{2k} \cdot 2^{n-2k} \cdot 3^k \in \mathbb{N}.$$

De aici observăm că, adunând $(2+\sqrt{3})^n$ cu numărul subunitar, pozitiv $(2-\sqrt{3})^n$, se obţine un număr natural, deci rezultă că:

$$a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1.$$

Numerele $x_1 = 2+\sqrt{3}$ şi $x_2 = 2-\sqrt{3}$ sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea $x^2 - 4x + 1 = 0$. Şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $s_n = x_1^n + x_2^n$ satisface:

$$s_{n+2} - 4s_{n+1} + s_n = 0.$$

[1)] Lucrare prezentată de autor în cadrul celei de a XXXIII-a Sesiuni de comunicări metodico-ştiinţifice desfăşurată la Sinaia în 21 octombrie 2006. (N.R.)

Într-adevăr:

$$s_{n+2}-4s_{n+1}+s_n=(x_1^{n+2}+x_2^{n+2})-4(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+(x_1^n+x_2^n)=$$
$$=(x_1^{n+2}-4x_1^{n+1}+x_1^n)+(x_2^{n+2}-4x_2^{n+1}+x_2^n)=$$
$$=x_1^n(x_1^2-4x_1+1)+x_2^n(x_2^2-4x_2+1)=0,$$

deoarece expresiile din paranteze sunt nule. Cum $a_n=s_n-1$, obţinem:

$$(a_{n+2}-1)-4(a_{n+1}-1)+(a_n-1)=0 \Leftrightarrow a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n-2.$$

2. *Se consideră şirul de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general dat prin* $a_n=\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^2}+...+\frac{1}{C_n^n}$. *Să se determine o relaţie de recurenţă pentru şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$, *apoi să se demonstreze că şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este descrescător.*

Cu formula combinărilor, avem:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}=1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}=1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1-k)!(k+1)!}{n!},$$

unde ultima sumă este obţinută din suma precedentă în care am înlocuit k cu $n-1-k$. Rezultă prin adunare şi dând factor comun:

$$2a_n=2+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{(n-1-k)!(k+1)!}{n!}\right)=$$
$$=2+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!(n-k+k+1)}{n!}=$$
$$=2+\frac{n+1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!}=2+\frac{n+1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{C_{n-1}^k},$$

deci:

$$a_n=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_{n-1}.$$

De aici:

$$a_n-a_{n-1}=1-\frac{n-1}{2n}\cdot a_{n-1}\leq 1-\frac{n-1}{2n}\left(\frac{1}{C_{n-1}^0}+\frac{1}{C_{n-1}^1}+\frac{1}{C_{n-1}^{n-2}}+\frac{1}{C_{n-1}^{n-1}}\right)=0.$$

3. *Se consideră şirul lui Fibonacci,* $(f_n)_{n\geq 1}$ *definit prin relaţia de recurenţă* $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, *cu* $f_1=f_2=1$. *Să se determine o relaţie de recurenţă pentru şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general* $a_n=f_n^2$.

Avem:

$$a_n=f_n^2=(f_{n-1}+f_{n-2})^2=f_{n-1}^2+f_{n-2}^2+2f_{n-1}f_{n-2}=$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + \frac{(f_{n-1} + f_{n-2})^2 - (f_{n-1} - f_{n-2})^2}{2} =$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + \frac{f_n^2 - f_{n-3}^2}{2} = a_{n-1} + a_{n-2} + \frac{a_n - a_{n-3}}{2},$$

deci:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3}.$$

4. *Fie a, b numere reale. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ date de relaţiile de recurenţă $x_{n+1} = \frac{y_n}{x_n}$, $y_{n+1} = \frac{y_n - 1}{x_n - 1}$, $x_1 = a$, $y_1 = b$. Să se demonstreze că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt periodice.*

Avem:

$$x_{n+3} = \frac{y_{n+2}}{x_{n+2}} = \frac{\dfrac{y_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 1}}{\dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}} = \frac{y_{n+1} - 1}{y_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} - 1} =$$

$$= \frac{\dfrac{y_n - 1}{x_n - 1} - 1}{\dfrac{y_n - 1}{x_n - 1}} \cdot \frac{\dfrac{y_n}{x_n}}{\dfrac{y_n}{x_n} - 1} = \frac{y_n - 1 - x_n + 1}{y_n - 1} \cdot \frac{y_n}{y_n - x_n} = \frac{y_n}{y_n - 1},$$

de unde:

$$y_{n+5} = \frac{x_{n+3}}{x_{n+3} - 1} = \frac{\dfrac{y_n}{y_n - 1}}{\dfrac{y_n}{y_n - 1} - 1} = y_n.$$

Apoi:

$$y_{n+2} = \frac{y_{n+1} - 1}{x_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{y_n - 1}{x_n - 1} - 1}{\dfrac{y_n}{x_n} - 1} = \frac{x_n}{x_n - 1},$$

deci:

$$x_{n+5} = \frac{y_{n+2}}{y_{n+2} - 1} = \frac{\dfrac{x_n}{x_n - 1}}{\dfrac{x_n}{x_n - 1} - 1} = x_n.$$

5. *Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general dat prin $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}$. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ nu este periodic.*

Presupunem, prin absurd, că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este T-periodic. Atunci, pentru orice $n \geq 1$:

$$(-1)^{[\sqrt{n}]} = (-1)^{[\sqrt{n+T}]}$$

şi în particular pentru $n = T^2 + T + 1$, rezultă:

$$(-1)^{[\sqrt{T^2+T+1}]} = (-1)^{[\sqrt{T^2+2T+1}]} \Leftrightarrow (-1)^T = (-1)^{T+1}, \text{ contradicţie.}$$

6. *Fie $k \geq 2$ un număr natural. Se consideră şirul de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = (1 + k + k^2 + ... + k^n)^2 - k^n$. Să se demonstreze că nici un termen al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ nu este număr prim.* (Germania 2000)

Avem:

$$a_n = \left(\frac{k^{n+1}-1}{k-1}\right)^2 - k^n = \frac{1}{(k-1)^2}\cdot\left[\left(k^{n+1}-1\right)^2 - k^n(k-1)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{(k-1)^2}\cdot\left[k^{2n+2} - 2k^{n+1} + 1 - k^n(k^2-2k+1)\right] =$$

$$= \frac{k^{2n+2} - k^{n+2} - k^n + 1}{(k-1)^2} = \frac{k^{n+2}-1}{k-1}\cdot\frac{k^n-1}{k-1},$$

deci $a_n = (1+k+k^2+...+k^{n+1})(1+k+k^2+...+k^{n-1})$.

7. *Există şiruri* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de numere naturale strict pozitive astfel încât* $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$ *să fie pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural* $n\geq 1$? (Spania 1999)

Răspunsul este afirmativ şi vom construi inductiv un astfel de şir. Întâi definim $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ şi presupunem că sunt definiţi $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât numerele a_1^2, $a_1^2+a_2^2, ..., a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$ sunt pătrate perfecte. Dacă notăm $k^2 = a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$, atunci căutăm a_{n+1} astfel încât:

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+a_{n+1}^2 = p^2 \Leftrightarrow k^2+a_{n+1}^2 = p^2.$$

De aici:

$$k^2 = p^2 - a_{n+1}^2 \Leftrightarrow k^2 = (p-a_{n+1})(p+a_{n+1}).$$

În cazul când k este impar, putem alege:

$$\begin{cases} p - a_{n+1} = 1 \\ p + a_{n+1} = k^2 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{k^2-1}{2}.$$

În cazul când k este par, $k = 2t$, putem alege:

$$\begin{cases} p - a_{n+1} = 2 \\ p + a_{n+1} = 2t^2 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} = t^2 - 1.$$

8. *Se consideră şirul de numere întregi* $(a_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general dat prin* $a_n = 2^n - 3$. *Să se demonstreze că mulţimea numerelor prime care divid termeni ai şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este infinită.*

Să presupunem, prin absurd, că divizorii primi ai tuturor termenilor şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt în număr finit, să zicem $p_1, p_2, ..., p_k$. Fie $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}$ termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ care se divid cu p_1, $p_2, ..., p_k$ respectiv. Cum toţi termenii şirului nu se divid cu vreun alt număr prim, exceptând p_1, $p_2, ..., p_k$, rezultă că orice alt termen are factori primi comuni cu cel puţin unul din termenii a_{n_1}, $a_{n_2}, ..., a_{n_k}$. Vom construi însă un termen al şirului care este prim cu fiecare dintre termenii a_{n_1}, $a_{n_2}, ..., a_{n_k}$ şi această contradicţie rezolvă problema. Notăm, în acest sens:

$$q = a_{n_1}a_{n_2}\cdot ...\cdot a_{n_k}.$$

Fie 2^r şi 2^s, cu $r > 2$, două puteri ale lui 2 care dau acelaşi rest la împărţirea cu q. De aici rezultă că:

$$q \mid 2^r - 2^s \Leftrightarrow q \mid 2^s(2^{r-s}-1)$$

şi cum q este impar, rezultă q divide $2^{r-s}-1$. Dacă h este astfel încât:

$$qh = 2^{r-s}-1,$$

atunci:

$$a_{r-s+2} = 2^{r-s+2}-3 = 4\cdot 2^{r-s}-3 = 4(qh+1)-3$$

sau:

$$a_{r-s+2} = 4qh+1,$$

de unde rezultă evident că a_{r-s+2} şi q nu pot avea factori primi comuni.

9. *Se consideră şirul de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general dat prin* $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{n}{k}\right]$ *şi definim şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *prin* $b_n = (-1)^n$. *Să se calculeze* b_{2006}.

Evident, b_n este egal cu 1 sau cu -1, după cum n este par, respectiv impar. Pentru orice k, $\left[\dfrac{n}{k}\right]$ reprezintă numărul numerelor naturale $m \geq 1$ cu proprietatea că $mk \leq n$, deci a_n reprezintă numărul perechilor (m,k) de numere naturale nenule cu $mk \leq n$:

$$a_n = \operatorname{card}\{(m,k) \mid mk \leq n,\ m,k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dintre aceste perechi, numărul acelora cu $m \neq k$ este par, deoarece dacă (m,k) este admisibilă, atunci şi (k,m) este admisibilă. Din acest motiv, perechile de forma (k,m) cu $m \neq k$ nu influenţează paritatea şi astfel ne vor interesa doar perechile de forma (m,m) având proprietatea că $m\cdot m \leq n$. Evident, există $[\sqrt{n}]$ astfel de perechi, iar de aici:

$$b_{2006} = (-1)^{[\sqrt{2006}]} = (-1)^{44} = 1.$$

10. *Se consideră şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu termenul general dat prin* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$, *unde pentru fiecare număr natural* $k \geq 1$, a_k *reprezintă cel mai apropiat număr natural de* $\sqrt{k}$. *Să se calculeze* x_{1980}. (Rusia 1978, China 1980)

Pentru orice număr natural $m \geq 1$, avem:

$$a_k = m \Leftrightarrow m-\frac{1}{2} \leq \sqrt{k} < m+\frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2-m+\frac{1}{4} \leq k < m^2+m+\frac{1}{4},$$

deci:

$$a_k = m \Leftrightarrow k \in \left\{m^2-m+1, m^2-m+2, ..., m^2+m\right\}.$$

Cum $1980 = 44^2+44$, rezultă că:

$$x_n = \sum_{m=1}^{44}\left(\sum_{k=m^2-m+1}^{m^2+m}\frac{1}{a_k}\right) = \sum_{m=1}^{44}\left(\underbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+...+\frac{1}{m}}_{2m\ termeni}\right) = 88.$$

11. *Fie* k, a, b, c *numere naturale astfel ca* $\dfrac{a^2+b^2+c}{ab} = k$. *Se consideră şirul de numere reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definit prin relaţia* $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2+c}{a_n}$, *cu* $a_0 = a$, $a_1 = b$. *Să se arate că toţi termenii şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt numere naturale.* (Balcaniadă 1986)

Relaţia dată se scrie sub forma $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = c$ şi ţinând seama că prin înlocuirea lui n cu $n-1$, obţinem $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = c$, rezultă că:

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 \Leftrightarrow a_n(a_{n+2} + a_n) = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1})$$

sau:

$$\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}.$$

De aici rezultă că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenul general $b_n = \dfrac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$ este şir constant, din moment ce egalitatea anterioară se scrie sub forma $b_n = b_{n-1}$. Avem:

$$b_0 = \frac{a_2 + a_0}{a_1} = \frac{\dfrac{b^2 + c}{a} + a}{b} = \frac{a^2 + b^2 + c}{b} = k,$$

deci $b_n = k$. De aici:

$$\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = k \Leftrightarrow a_{n+2} = ka_{n+1} - a_n$$

şi acum rezultă inductiv că toţi termenii şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt numere naturale.

Catedra de Matematică
Universitatea Valahia din Târgovişte

Premiul Henri Poincaré al Şcolii Politehnice din Paris

Franţa, Şcoala Politehnică şi ... matematica!

Îi cunoaşteţi, fără îndoială, pe *Cauchy*, *Poincaré*, *Poisson*, *Chasles*, *Mandelbrot* etc. figuri emblematice din lecţiile de matematică. Poate vă sunt mai puţini familiari *Jacques-Louis Lions*, *Laurent Schwartz*, *Paul Gauduchon* sau *Jean Pierre Bouriuignon*? Totuşi, toate aceste mari personalităţi din lumea ştiinţifică, mai vechi sau contemporane, au cel puţin două elemente în comun: Franţa şi Şcoala Politehnică.

Mai întai să vorbim despre Franţa. Franţa nu este doar ţara artei sau a modei, ci şi a înaltei tehnologii şi a geniului matematic, recunoscut pe plan mondial. De fapt, ar trebui spus: Parisul este, fără comparaţie cu un alt oraş al planetei, pe primul loc în lume la matematică; aceasta este concluzia lui *Marcel Berger*, specialist recunoscut unanim în lume în geometria diferenţială, şi a revistei americane Science Watch. Nu este o întâmplare faptul că un sfert dintre medaliile Fields au fost decernate matematicienilor francezi sau celor care lucrează în Franţa.

Şi Şcoala Politehnică? Este cea mai prestigioasă şi una dintre cele mai vechi Mari Şcoli de Ingineri din Franţa. Se află în regiunea pariziană, cu un campus de aproape 200 de hectare, în vecinătatea marilor centre de cercetare. Încă de la înfiinţarea sa de către *Monge*, la sfârşitul secolului al XVIII-lea, a format cercetători de reputaţie internaţională în domeniul ştiinţific. Profesorii şi cercetătorii, de vârf în domeniul lor, contribuie la dezvoltarea ştiinţifică a Franţei. Majoritatea dintre ei aparţin centrului nostru de cercetare în care sunt grupate 21 de laboratoare ce dispun de mijloacele tehnice cele mai avansate. Putem cita spre exemplu, departamentul nostru de matematică, fondat de către *Laurent Schwartz*, care a primit medalia

Fields în 1950 şi care azi numără peste 40 de cercetători; sau departamentul de matematică aplicată, recunoscut în mod special în domeniul matematicii financiare. Fizica, şi în special fizica teoretică, se evidenţiază de asemenea în campusul nostru. Absolvenţii Şcolii Politehnice se disting şi în departamentele de conducere şi de administraţie ale marilor intreprinderi (Renault, Alcatel etc.), în dezvoltarea marilor proiecte tehnologice.

O întâlnire importantă: Olimpiada de Matematică, Piteşti 2007

Şcoala Politehnică doreşte să iniţieze o dinamică de anvergură europeană pentru a promova talentul excepţional al Franţei în domeniul ştiinţelor şi al educaţiei. În acest context, începând din acest an, vom veni în Romania pentru a întâlni elevi excepţionali care îşi doresc o carieră ştiinţifică de înalt nivel. Pentru a vă cunoaşte mai bine, vă vom întâlni la Piteşti, în cadrul organizării Olimpiadei de Matematică, în perioada 8 - 15 aprilie 2007; cu această ocazie, am creat un premiu care să recompenseze trei dintre elevii care vor obţine rezultate excelente la acest concurs. Premiul nostru a primit numele *Prix Henri Poincaré de l'Ecole Polytechnique* şi este adresat elevilor din clasele a XI-a şi a XII-a. Laureaţii acestui premiu vor putea vizita Parisul timp de o săptamână în perioada mai - iulie 2007 (transportul şi cazarea fiind asigurate). În timpul acestei călătorii, laureaţii vor putea vizita Şcoala Politehnică (campusul, laboratoarele, putând să discute cu profesorii şi cu alţi elevi români), precum şi alte mari şcoli pariziene, să viziteze laboratoare de cercetare şi mari intreprinderi şi, bineînţeles, să profite de curiozităţile turistice şi culturale din Paris.

Vreţi să fiţi alături de noi la Şcoala Politehnică?

Şcoala Politehnică admite prin concurs unii dintre cei mai străluciţi elevi în domeniul ştiinţific; în fiecare an, 500 de elevi intră la Şcoala Politehnică: 400 de studenţi francezi şi 100 de studenţi străini (printre care întâlnim în fiecare an şi elevi români). După cum aţi înţeles, matematica are un rol preponderent la Şcoala Politehnică; de aceea, selecţia se face, în principal, pe baza cunoştinţelor şi nivelului la matematică şi, de asemenea, la fizică. Cunoaşterea limbii franceze nu este o condiţie pentru candidaţi, căci probele de concurs pot avea loc şi în limba engleză, iar după admitere Şcoala vă susţine cursurile de învăţare a limbii franceze. Studiile durează 3 ani şi îndreaptă studenţii spre specializare în una dintre cele 8 mari discipline predate: matematică, matematică aplicată, fizică, informatică, chimie, biologie, mecanică şi economie. Studenţii urmează, de asemenea, cursuri de ştiinţe umaniste şi sociale, de limbă şi comunicare, îşi pun în aplicare cunoştinţele în cadrul stagiilor din intreprinderi şi laboratoare şi participă la proiecte în grup. După aceşti 3 ani, studenţii internaţionali au posibilitatea să-şi continue formarea printr-o specializare profesională de 15 luni într-una din marile şcoli aplicative sau să continue în domeniul cercetării (al 2-lea an de master şi apoi teza). La Şcoala Politehnica, viaţa de student este deosebită prin cazarea în campus, bogăţia activităţilor sportive şi marea diversitate de activităţi de grup.

Pentru a ne cunoaşte mai bine, vizitaţi situl `http://www.polytechnique.edu`, iar pentru informaţii privitoare la Premiul Poincaré puteţi să ne contactaţi la adresa: `prixpoincare@polytechnique.fr`.

Andrei Moroianu

Matematica azi, Curs opţional la clasa a VI-a[1)]

DE DORINA HUMIŢA ŞI MARIŢA MIRULESCU

Durata cursului: 36 de ore anual

Argumente pentru alegerea opţionalului

Am ales acest opţional pentru că urmăreşte:

– să lărgesc orizontul matematic al elevilor;

– să măresc paleta de aplicaţii pe care elevii le pot rezolva utilizând baza teoretică adunată până acum;

– să obţin un alt punct de vedere asupra matematicii, încercând s-o prezint într-o formă cât mai accesibilă şi plăcută.

Obiective cadru urmărite în alcătuirea programei

I. Dezvoltarea interesului şi a motivaţiei pentru studiul matematicii.

Obiective de referinţă	**Activităţi de învăţare**
Elevul va fi capabil: – să înţeleagă importanţa studiului pentru dezvoltarea raţionamentului; – să perceapă existenţa aplicabilităţii practice a matematicii şi importanţa sa în viaţa de zi cu zi.	– analizarea unor probleme a căror rezolvare are la bază observaţii şi raţionamente imediate; – prezentarea unor probleme cu conţinut practic.

II. Crearea climatului ştiinţific necesar dezvoltării gândirii

Obiective de referinţă	**Activităţi de învăţare**
Elevul va fi capabil: – să se mobilizeze pentru a putea înţelege şi participa la activităţi de probleme propuse şi de creare de exerciţii şi probleme originale.	– analizarea rezolvării unor probleme date; – propunerea de către elevi a unor exerciţii şi probleme.

III. Cunoaşterea, înţelegerea conceptelor, terminologiei şi procedeelor de calcul specifice matematicii

Obiective de referinţă	**Activităţi de învăţare**
Elevul va fi capabil: – să-şi însuşească noi concepte matematice, terminologia aferentă şi procedeele de calcul specifice; – să-şi formeze obişnuinţa de a recurge la concepte şi metode matematice în abordarea unor situaţii cotidiene sau rezolvarea unor probleme practice.	– analizarea unor probleme; – notarea prescurtată a datelor (ce se dă, ce se cere); – exerciţii de rezolvare a problemelor tip; – redactarea rezolvării unor probleme.

[1)] Programa opţionalului a apărut în „Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş Severin", nr. 17, an VII-2006. (N.R.)

IV. Dezvoltarea capacităţilor de exploatare/investigare şi rezolvare de probleme

Obiective de referinţă	**Activităţi de învăţare**
Elevul va fi capabil: – să aleagă din multitudinea de acţiuni însuşite şi metode studiate, pe acelea care îl vor duce la rezolvarea unei probleme date.	– rezolvarea unor probleme ce implică utilizarea succesivă a mai multor metode şi procedee studiate.

V. Dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic

Obiective de referinţă	**Activităţi de învăţare**
Elevul va fi capabil: – să argumenteze rezolvările făcute utilizând limbajul matematic adecvat; – să colaboreze în cadrul unei echipe la activităţi specifice disciplinei.	– prezentarea în scris şi oral a rezolvării unor probleme; – elaborarea într-un grup de lucru a rezolvărilor unor probleme dificile.

Conţinuturi

1. Calculul unor sume.
2. Probleme de numărare şi combinatorică.
3. Problem deosebite de divizibilitate.
4. Exemple şi contraexemple în matematică.
5. Metoda reducerii la absurd în aritmetică.
6. Probleme de logică (distractivă).
7. Lucrări de verificare.
8. Recapitulare.

Modalităţi de evaluare

1. Teste de evaluare a cunoştinţelor.
2. Efectuarea unor lucrări individuale sau pe grupe cu autoevaluare.
3. Chestionarea orală pe tot parcursul anului.
4. Notarea în cadrul unor activităţi practice prin observarea activităţii.

SEMESTRUL I

Nr. crt.	**Conţinuturi**	**Obiective Operaţionale**	**Nr. ore**	**Săptămâna**	**Observaţii**
I.	**Calculul unor sume**	Elevul va fi capabil:			Se calculează suma primelor n numere pare impare)
1.	Suma primelor n numere naturale şi aplicaţii ale ei	– să recunoască tipul de problemă	2	(1) şi (2)	
2.	Suma pătratelor (cuburilor) primelor n numere naturale şi aplicaţii ale ei	şi metoda de abordare a rezolvării	2	(3) şi (4)	
3.	Sume în care intervin anumite numere raţionale	– să generalizeze metoda învăţată şi la calcularea altor	2	(5) şi (6)	
4.	Aplicaţii	sume	1	(7)	
5.	Lucrare pentru verificarea cunoştinţelor		1	(8)	

II.	**Probleme de numărare şi combinatorică**				Se insistă pe compunerea
6.	Principiul cutiei	– să recunoască problemele în care	2	(9) şi (10)	de probleme care să se
7.	Aplicaţii	se aplică principiul cutiei	2	(11) şi (12)	încadreze în metoda
8	Lucrare pentru verificarea cunoştinţelor	– să poată rezolva aceste probleme	1	(13)	studiată
III.	**Recapitulare**	– să poată propune probleme de acest tip	1	(14)	
IV.	**Probleme deosebite de divizibilitate**	– să poată utiliza criteriile de divizi-			
9.	Criteriul de divizibilitate cu 7	bilitate cu 7, 11 şi 13 în rezolvarea	2	(15) şi (16)	
10.	Criteriul de divizibilitate cu 11	unor exerciţii	2	(17) şi (18)	

Semestrul al II-lea

11.	Criteriul de divizibilitate cu 13	Elevul va fi capabil – să recunoască	1	(1)	Se calculează
12.	Aplicaţii	numerele perfecte	1	(2)	suma
13.	Numere perfecte	şi numerele	1	(3)	primelor n
14.	Numere amiabile	amiabile	1	(4)	numere pare
15.	Lucrare pentru verificarea cunoştinţelor		1	(5)	(impare)
V.	**Exemple şi contra-exemple în matematică**	– să poată construi exemple şi contra-exemple pornind de			Se insistă pe construirea de exemple
16.	Rolul exemplelor şi contraexemplelor în matematică	la o noţiune dată	2	(6) şi (7)	şi contra-exemple pentru
17.	Aplicaţii		1	(8)	anumite
18.	Lucrare pentru verificarea cunoştinţelor		1	(9)	probleme date
VI.	**Utilizarea metodei reducerii la absurd**	– să recunoască problemele ce se			
19.	Descrierea metodei	pot rezolva folosind	1	(10)	
20.	Aplicarea metodei în rezolvarea unor probleme de aritmetică	metoda reducerii la absurd – să poată utiliza	2	(11) şi (12)	
21.	Lucrare pentru verificarea cunoştinţelor	metoda reducerii la absurd	1	(13)	

VII. 22.	**Probleme de logică (distractivă)** Rezolvarea unor probleme de logică		2	(14) şi (15)	
VIII.	**Recapitulare finală**		3	(16),(17), (18)	

Standarde curriculare de performanţă

Standarde minimale

1. Să recunoască suma primelor n numere naturale şi să o poată calcula pentru valori particulare ale lui n.

2. Să recunoască problemele care se pot rezolva utilizând principiul cutiei.

3. Să conştientizeze existenţa mai multor criterii de divizibilitate faţă de cele studiate la clasă.

4. Să perceapă perfect ce înseamnă exemplu şi ce înseamnă contraexemplu în matematică.

5. Să cunoască etapele ce trebuie parcurse în aplicarea metodei reducerii la absurd.

6. Să perceapă exact datele unei probleme de logică.

Standarde optime

În plus, faţă de standardele minimale, elevul trebuie:

1. Să poată calcula suma numerelor pare (impare) mai mici decât un număr dat.

2. Să rezolve probleme simple de numărare.

3. Să poată aplica criteriile de divizibilitate cu 7, 11, 13 în recunoaşterea numerelor divizibile cu ele.

4. Să poată construi singur exemple şi contraexemple pentru problemele date.

5. Să recunoască problemele ce pot fi rezolvate folosind metoda reducerii la absurd.

6. Să poată rezolva problemele de logică (distractivă) cu grad de dificultate mediu.

Standarde de performanţă

În plus, faţă de standarde optime, elevul trebuie:

1. Să poată calcula şi alte sume în afară de cele relativ imediate.

2. Să rezolve probleme folosind principiul cutiei.

3. Să poată rezolva probleme în care intervin criteriile de divizibilitate cu 7, 11, 13.

4. Să utilizeze contraexemple în rezolvarea unor probleme.

5. Să opereze concret cu metoda reducerii la absurd.

6. Să rezolve probleme de logică (distractivă) cu grad mai mare de dificultate.

Bibliografie

[1] I. Pătraşcu, C. Preda, *Complemente de matematică pentru gimnaziu*, Editura Cardinal, Craiova, 1994.
[2] L. Niculescu, *Teme de algebră pentru gimnaziu*, Editura Cardinal, Craiova, 1993.
[3] I. Dăncilă, *Matematica gimnaziului între profesor şi elev*, Editura Corint, Bucureşti, 1996.

Liceul Pedagogic C. D. Loga
din Caransebeş

NOTE MATEMATICE

Unele serii divergente

DE GHEORGHE COSTOVICI

Abstract

This short note presents some conditions under which certain series is divergent.
Key words: divergent series
M.S.C.: 40A05

În propoziţia 2 vom evidenţia unele serii divergente.

Propoziţia 1. *Dacă $a > 0$, $k > 0$ şi $ak \geq \frac{1}{\mathrm{e}}$, atunci avem $\ln x \leq kx^a$, cu egalitate numai dacă $ak = \frac{1}{\mathrm{e}}$ şi $x = \frac{1}{(ak)^{\frac{1}{a}}}$.*

Demonstraţie. Considerăm $f(x) = \ln x - kx^a$ şi avem:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - akx^{a-1} = \frac{1}{x} - \frac{ak}{x^{1-a}} = \frac{1}{x} - \frac{akx^a}{x} = \frac{1}{x}(1 - akx^a).$$

Observăm că:

(α) $1 - akx^a > 0 \Leftrightarrow akx^a < 1 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{ak}\right)^{\frac{1}{a}}$, ceea ce implică $f'(x) > 0$, de unde:

$$f(x) < f\left(\left(\frac{1}{ak}\right)^{\frac{1}{a}}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{ak}\right)^{\frac{1}{a}}\right) - k\frac{1}{ak} = \frac{1}{a}\left(\ln\frac{1}{ak} - 1\right) \leq 0$$

(deoarece $\ln\frac{1}{ak} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{ak} \leq \mathrm{e}$, ceea ce este adevărat prin ipoteză).

Apoi:

(β) $1 - akx^a < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{ak}\right)^{1/a}$, ceea ce implică:

$$f'(x) < 0, \quad \text{de unde} \quad f(x) < f\left(\left(\frac{1}{ak}\right)^{\frac{1}{a}}\right) \leq 0$$

$\left(\text{deoarece } f\left(\left(\dfrac{1}{ak}\right)^{\frac{1}{a}}\right) = \dfrac{1}{a}\left(\ln\dfrac{1}{ak} - 1\right) \leq 0, \text{ cu egalitate numai dacă } ak = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right).$

Propoziţia 2. *Dacă* $a > 0$, $k > 0$, $ak \geq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $0 < b \leq 1$, $0 < c \leq \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{a}}$, $q_n = k\left(\ln\left(n(\ln n)^c\right)\right)^a$ *şi* $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{1+b}}$, *atunci seria*:

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{q_n^{(\frac{1}{a})-1}+1+b-ck^{\frac{1}{a}}}} \cdot n^{\frac{k^{\frac{1}{a}}-1}{q_n^{(\frac{1}{a})-1}+1+b-ck^{\frac{1}{k}}}},$$

este divergentă.

Demonstraţie. Prin propoziţia 1, $k > 0$, $a > 0$ şi $ka \geq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ implică $\ln x \leq kx^a$ şi deci $\ln(\ln n) \leq k(\ln n)^a$ pentru toţi $n > 1$.

Atunci:

$$n > \mathrm{e} \Rightarrow \ln n > 1 \Rightarrow (\ln n)^c > 1 \Rightarrow n(\ln n)^c > n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(n(\ln n)^c\right) > \ln n \Rightarrow q_n = k\left(\ln\left(n(\ln n)^c\right)\right)^a > k(\ln n)^a > \ln(\ln n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_n^{(\frac{1}{a})-1}\ln(\ln n) < q_n^{\frac{1}{a}}$$

şi:

$$(\ln n)^{q_n^{(\frac{1}{a})-1}} = \mathrm{e}^{q_n^{(\frac{1}{a})-1}}\ln(\ln n) < \mathrm{e}^{q_n^{\frac{1}{a}}} = \mathrm{e}^{k^{\frac{1}{a}}\ln(n(\ln n)^c)} = \left(n(\ln n)^c\right)^{k^{\frac{1}{a}}} =$$

$$= n(\ln n)^{1+b}n^{-1}(\ln n)^{-1-b}n^{k^{\frac{1}{a}}}(\ln n)^{ck^{\frac{1}{a}}} = a_n^{-1}n^{k^{\frac{1}{a}}-1}(\ln n)^{ck^{\frac{1}{a}}-1-b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln n)^{q_n^{(\frac{1}{a})-1}+1+b-ck^{\frac{1}{a}}} < a_n^{-1}n^{k^{\frac{1}{a}}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln n < a_n^{-1/(q_n^{(\frac{1}{a})-1}+1+b-ck^{\frac{1}{a}})}n^{(k^{\frac{1}{a}}-1)/(q_n^{(\frac{1}{a})-1}+1+b-ck^{\frac{1}{a}})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n\ln n = \frac{1}{n(\ln n)^b} < a_n^{1-1/(q_n^{(\frac{1}{a})-1}+1+b-ck^{\frac{1}{a}})}n^{(k^{\frac{1}{a}}-1)/(q_n^{(\frac{1}{a})-1}+1+b-c\cdot k^{\frac{1}{a}})}.$$

Cu ajutorul criteriului comparaţiei pentru serii cu termeni pozitivi, obţinem concluzia propoziţiei 2.

Observaţie. Pentru $b = c = k = 1$ şi $a = 1/2$ se obţine Exemplul din [1].

Bibliografie

[1] G. Pataki, *On the convergence of the series* $\sum a_n^{1-x_n/\ln(1+n)}$, Bul. Ştiinţ. Univ. Baia Mare, Ser. B, Matematică-Informatică, vol. XVIII (2002), nr. 1, pp. 65-68.

Catedra de Matematică,
Universitatea Tehnică Gh. Asachi din Iaşi
B-dul Carol I, Nr. 11, Iaşi, 700506
costovic@gauss.tuiasi.ro

233. Să se arate că primitiva funcţiei $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^p x$, cu $p \in \mathbb{R}_+$, poate fi redusă la primitiva unei funcţii raţionale în $\sin x$ dacă şi numai dacă $p \in \mathbb{N}$. Mai mult, în acest caz, primitiva nu poate conţine decât o combinaţie liniară de monoame în puteri naturale ale lui $\sin x$ şi $\cos x$, precum şi un termen în x.

Constantin P. Niculescu şi **Andrei Vernescu**

234. Fie G un grup aditiv abelian iar $f : G \to \mathbb{R}$ o aplicaţie cu proprietatea că:

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y), \quad \forall\, x, y \in G.$$

Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, are loc inegalitatea:

$$f(nx) \leq n^2 f(x), \qquad \forall\, x \in G.$$

În plus, dacă orice element al lui G are ordin finit, atunci f este o funţie pozitivă.

Dan Radu

235. Să se demonstreze că:

a) Polinomul minimal al lui $\cos \frac{\pi}{7}$ peste $\mathbb{Q}$ este:

$$f = X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}.$$

b) Polinomul minimal al lui $\cos \frac{2\pi}{7}$ peste $\mathbb{Q}$ este:

$$g = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}.$$

c) Polinomul minimal al lui $\cos \frac{3\pi}{7}$ coincide cu f.

d) Există egalităţile:

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}; \qquad \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

Marcel Ţena

236. Fie A un inel cu unitatea în care pentru orice două elemente x şi y egalitatea binomială:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

este adevărată pentru trei valori consecutive ale numărului natural nenul n (nu neapărat acelaşi pentru orice x şi y din A). Să se arate că A este comutativ.

Rămâne concluzia adevărată dacă A nu are element unitate?

Marian Tetiva

237. În tetraedrul ortocentric $[ABCD]$ se notează cu h_A şi m_A lungimea înălţimii, respectiv a medianei tetraedrului duse din vârful A pe faţa BCD (şi analoagele), iar cu r şi R razele sferelor înscrisă, respectiv circumscrisă tetraedrului.

Să se arate că au loc următoarele rafinări ale inegalităţii lui *Durrande* în tetraedru ($R \geq 3r$):

a) $\dfrac{1}{4r^2} \leq \dfrac{1}{h_A^2} + \dfrac{1}{h_B^2} + \dfrac{1}{h_C^2} + \dfrac{1}{h_D^2} \leq \dfrac{1}{324} \cdot \dfrac{R^4}{r^6}$;

b) $\dfrac{9}{4R^2} \leq \dfrac{1}{m_A^2} + \dfrac{1}{m_B^2} + \dfrac{1}{m_C^2} + \dfrac{1}{m_D^2} \leq \dfrac{1}{324} \cdot \dfrac{R^4}{r^6}$.

Marius Olteanu

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

După intrarea la tipar a numărului 4/2006 al revistei, am primit – pentru problema **209** – încă două soluţii corecte de la domnii *Nicuşor Minculete* – profesor la Colegiul Naţional Mihai Viteazul din Sfântu Gheorghe şi *Marius Olteanu* – inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea. Facem cuvenita menţiune în vederea completării listei rezolvitorilor de probleme din anul 2006.

212. *În* $\mathbb{R}[x]$ *se consideră polinoamele*:

$$F_n(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} S_n^k x^k$$

unde $S_n^1, \ldots, S_n^n \in \mathbb{Z}$ *sunt numerele lui Stirling de ordinul* n.

a) *Să se stabilească o relaţie între* S_{n+1}^k, S_n^k *şi* S_n^{k-1} *şi apoi să se dea o formulă generală pentru calculul lui* S_n^k *în funcţie de* n *şi* k.

b) *Să se arate că orice polinom*:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

poate fi reprezentat sub forma $P_n(x) = (-1)^n D_n(x)$ *unde* $D_n(x)$ *este polinomul caracteristic al unei matrici* $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *convenabil aleasă.*

c) *Să se scrie matricea* A_n *de la punctul* b) *corespunzătoare polinomului*:

$$f_n(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

să se diagonalizeze această matrice şi apoi să se deducă o nouă metodă pentru calculul numerelor lui Stirling $S_{n+1}^1, \ldots, S_{n+1}^n$. *Caz particular*: $n = 4$.

d) *Se consideră polinoamele*:

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}(x-1)\ldots(x-n), \qquad \pi_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}x(x-1)\ldots(x-n+1).$$

Să se arate că $\varphi_n = \pi_n$ *şi apoi să se exprime coeficienţii lui* φ_n şi π_n *cu ajutorul numerelor lui Stirling în două moduri diferite.*

e) *Folosind rezultatele de la punctul* d), *să se stabilească egalităţile*:

$$S_{n+1}^{k+1} = n! \sum_{p=k}^{n} \frac{(-1)^{n+p}}{p!} S_p^k, \qquad S_n^{n-r} = (n-1)! \sum_{p=0}^{r} \frac{(-1)^p}{(n-p-1)!} S_{n-p-1}^{n-r-1}.$$

Dan Radu

Soluţia autorului. a) Deoarece:

$$F_{n+1}(x) = (x-n)F_n(x),$$

rezultă că:

$$\sum_{k=1}^{n+1} S_{n+1}^k x^k = \sum_{k=1}^{n} S_n^k x^{k+1} - n \sum_{k=1}^{n} S_n^k x^k$$

şi deci:

$$S_{n+1}^k = S_n^{k-1} - nS_n^k, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

iar:

$$S_{n+1}^{n+1} = S_n^n = \ldots = S_1^1 = 1.$$

Spre exemplu:

$$\begin{array}{lll} S_1^1 = 1 & & \\ S_2^1 = -1, & S_2^2 = 1, & \\ S_3^1 = 2, & S_3^2 = S_2^1 - 2S_2^2 = -3, & S_3^3 = 1, \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .} \end{array}$$

Deoarece $F_n(p) = 0$ pentru orice $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, iar $F_n(n) = n!$, suntem conduşi la sistemul:

$$\begin{cases} 1^n S_n^n + \ldots + 1^k S_n^k + \ldots + 1 S_n^1 = 0 \\ 2^n S_n^n + \ldots + 2^k S_n^k + \ldots + 2 S_n^1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)^n S_n^n + \ldots + (n-1)^k S_n^k + \ldots + (n-1) S_n^1 = 0 \\ n^n S_n^n + \ldots + n^k S_n^k + \ldots + n S_n^1 = n! \end{cases}.$$

Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1^n & \ldots\ldots & 1 \\ 2^n & \ldots\ldots & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ n^n & \ldots\ldots & n \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1^{n-1} & \ldots\ldots & 1 \\ 2^{n-1} & \ldots\ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ n^{n-1} & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[n!\,(n-1)! \ldots 2!\,1! \right].$$

Rezolvând sistemul după regula lui *Cramer*, rezultă:

$$S_n^k = (-1)^{k-1} n!\, \frac{\Delta_n^{n-k+1}}{\Delta} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + k - 1} \cdot \frac{\Delta_n^{n-k+1}}{1!2! \ldots (n-1)!},$$

unde:

$$\Delta_n^{n-k+1} = \begin{vmatrix} 1^n & \ldots & 1^{k+1} & 1^{k-1} & \ldots 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (n-1)^n & \ldots & (n-1)^{k+1} & (n-1)^{k-1} & \ldots (n-1) \end{vmatrix}.$$

b) Se consideră matricea:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

şi fie $D_n(x) = \det(A_n - xI_n)$. Vom arăta, prin inducţie, că $P_n(x) = (-1)^n D_n(x)$.

Pentru $n = 1$, $P_1(x) = x + a_1$; cum $D_1(x) = -(x + R_1)$, rezultă că $P_1(x) = (-1)^1 D_1(x)$. Presupunem proprietatea adevărată pentru $n = k$, adică faptul că $P_k(x) = (-1)^k D_k(x)$. Dezvoltând după prima coloană determinanul $D_{k+1}(x)$, vom obţine:

$$D_{k+1}(x) = -xD_k(x) + (-1)^{k+1} a_{k+1}$$

şi deci:

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) + a_{k+1} = (-1)^k x D_k(x) + a_{k+1} =$$
$$= (-1)^{k+1} \left(-xD_k(x) + (-1)^{k+1} a_{k+1} \right) = (-1)^{k+1} D_{k+1}(x).$$

Conchidem că proprietatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

c) Evident, $xf_n(x) = F_{n+1}(x)$ şi deci:

$$f_n(x) = x^n + S_{n+1}^n x^{n-1} + \ldots + S_{n+1}^1.$$

Urmează că matricea A_n corespunzătoare după punctul b) polinomului f_n este:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -S_{n+1}^1 & -S_{n+1}^2 & \ldots & -S_{n+1}^{n-1} & -S_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Deoarece $f_n(x) = (-1)^n D_n(x)$, urmează că $D_n(x) = 0$ dacă şi numai dacă $f_n(x) = 0$ şi deci valorile proprii ale lui A_n sunt $x_1 = 1, \ldots, x_n = n$. Urmează că A_n este diagonalizabilă, forma sa diagonală fiind:

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Pentru valoarea proprie $x_p = p$ ($p \in \{1.\ldots.n\}$), primele $n-1$ ecuaţii ale sistemului caracteristic sunt:

$$\begin{cases} -px_1 + x_2 & = 0 \\ \qquad -px_2 + x_3 & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad\qquad -px_{n-1} + x_n & = 0 \end{cases}$$

Urmează atunci că $x_i = px_{i-1} = \ldots = p^{i-1}x_1$, pentru orice $i = \{1, \ldots, n\}$, deci putem alege ca vector propriu, corespunzător valorii proprii considerate, vectorul $v_p = (1, p, \ldots, p^{n-1})$. Deducem atunci, că matricea de trecere de la baza canonică la baza de diagonalizare va fi:

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n+1} & 2^{n+1} & \ldots & n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ţinând seama de faptul că $A_n = S \cdot \Delta_n \cdot S^{-1}$, rezultă o nouă metodă de calcul a numerelor lui *Stirling* prin identificarea ultimei linii din egalitatea matricială anterioară.

În cazul $n = 4$, avem:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -S_5^1 & -S_5^2 & -S_5^3 & -S_5^4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}. \qquad S_4^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & 42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conform procedeului descris, rezultă:

$$S_5^1 = -10, \quad S_5^2 = 35, \quad S_5^3 = -50, \quad S_5^4 = 24, \quad S_5^5 = 1.$$

d) Evident, $\varphi(p) = 0$ pentru orice $p \in \{1, \ldots, n\}$. De asemenea, se probează cu uşurinţă că $\pi_n(p) = 0$ pentru $p \in \{1, \ldots, n\}$. (Se procedează, de exemplu, prin inducţie). Pe de altă parte, coeficienţii conducători ai lui φ_n şi π_n coincid cu $\dfrac{(-1)^n}{n!}$, ceea ce atrage după sine faptul că $\varphi_n = \pi_n$.

Să observăm acum că:

$$2\varphi_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} F_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(S_{n+1}^1 x + \ldots + S_{n+1}^{n+1} x^{n+1} \right),$$

de unde

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} S_{n+1}^{k+1} x^k. \tag{1}$$

Pe de altă parte:

$$\pi_n(x) = 1 - \frac{1}{1!} F_1(x) + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} F_n(x)$$

şi deci:

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=k}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} S_p^k x^k. \tag{2}$$

e) Deoarece $\varphi_n = \pi_n$, rezultă că în reprezentările (1) şi (2) coeficienţii lui x^k trebuie să coincidă pentru orice $k \in \{0, \ldots, n\}$ şi deci:

$$\frac{(-1)^n}{n!} S_{n+1}^{k+1} = \sum_{p=k}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} S_p^k,$$

de unde:

$$S_{n+1}^{k+1} = n! \sum_{p=k}^{n} \frac{(-1)^{n+p}}{p!} S_p^k, \tag{3}$$

adică tocmai prima dintre identităţile solicitate.

În egalitatea de mai sus să facem schimbările de indici $n+1 = N$, $k+1 = N-R$. Rezultă $n = N-1$, $n-k = R$, iar când p parcurge mulţimea $\{k, k+1, \ldots, n\}$, rezultă că P parcurge mulţimea $\{0, 1, \ldots, R\}$. Cu aceste schimbări, egalitatea (3) devine:

$$S_N^{N-R} = (N-1)! \sum_{P=0}^{R} \frac{(-1)^P}{(N-P-1)!} S_{N-P-1}^{N-R-1},$$

adică tocmai a doua identitate din enunţ.

213. *Să se arate că pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *avem*:

$$\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!} + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+2)}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(3i+1) \prod_{j=0}^{n-k-1}(3j+2)}{k!(n-k)!} = 3^n.$$

Rôbert Szász

Soluţia autorului. Observăm că suma:

$$\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!} + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+2)}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(3i+1) \prod_{j=0}^{n-k-1}(3j+2)}{k!(n-k)!}$$

este coeficientul lui x^n în produsul *Cauchy* al seriilor de puteri:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!} x^n \quad \text{şi} \quad g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+2)}{n!} x^n.$$

Cum:

$$a_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!} \leq \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(3i+2)}{n!} = 3^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

rezultă că seria de puteri $f(x)$ este absolut convergentă pentru $|x|<\dfrac{1}{3}$. Seria de puteri $f(x)$ poate fi transcrisă în următoarea formă:

$$f(x)=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(3i+1)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

şi, după derivare, obţinem:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(3i+1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)\prod\limits_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!}x^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!}(n+1)x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!}x^n=1+3\left(x(f(x)-1)\right)'-2f(x)+2.$$

Astfel rezultă problema *Cauchy*:

$$(1-3x)f'(x)=f(x),\qquad f(0)=1,$$

cu soluţia unică:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}},\qquad |x|<\frac{1}{3}.$$

Analog se arată că:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}},\qquad |x|<\frac{1}{3}.$$

Din ultimele două identităţi obţinem că:

$$f(x)g(x)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(3i+1)}{n!}x^n\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(3i+2)}{n!}x^n\right)=\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^n,$$

iar de aici, prin identificarea coeficienţilor lui x^n, rezultă egalitatea dorită.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. Să observăm că putem scrie identitatea de demonstrat şi în forma:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(3i+1)\prod\limits_{j=0}^{n-k-1}(3j+2)}{k!(n-k)!}=3^n,$$

dacă vom considera egal cu 1 un produs pentru care indicele de sumare variază de la 0 la -1. În aceste condiţii, notând cu S_n suma din membrul stâng, putem calcula uşor:

$$S_1=\frac{1}{1!}+\frac{2}{1!}=3,\quad S_2=\frac{1\cdot 4}{2!}+\frac{1\cdot 2}{1!\cdot 1!}+\frac{2\cdot 5}{2!}=9,$$

deci relaţia $S_n=3^n$ este adevărată pentru $n\in\{1,2\}$ (nu avem de ce să evităm valoarea $n=1$).

Pe de altă parte, folosind recurenţa coeficienţilor binomiali (cu convenţia că $\binom{n}{k}=0$ pentru $n<k$ sau $k<0$), putem calcula:

$$(n+1)!S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\prod_{i=0}^{k-1}(3i+1)\prod_{j=0}^{n-k}(3j+2)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\prod_{i=0}^{k-1}(3i+1)\prod_{j=0}^{n-k}(3j+2)+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}\prod_{i=0}^{k-1}(3i+1)\prod_{j=0}^{n-k}(3j+2)$$

şi deci, dacă facem o mică schimbare a indicelui de sumare în cea de-a doua sumă:

$$(n+1)!S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1}(3i+1) \prod_{j=0}^{n-k}(3j+2) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k}(3i+1) \prod_{j=0}^{n-k-1}(3j+2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (3(n-k)+2+3k+1) \prod_{i=0}^{k-1}(3i+1) \prod_{j=0}^{n-k-1}(3j+2) \right] =$$

$$= 3(n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1}(3i+1) \prod_{j=0}^{n-k-1}(3j+2) = 3(n+1)n!S_n;$$

aşadar obţinem $S_{n+1} = 3S_n$, pentru orice $n \geq 1$. Evident, împreună cu $S_1 = 3$, această relaţie duce la $S_n = 3^n$, oricare ar fi $n \geq 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie. În exact acelaşi fel putem demonstra că, pentru orice şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea $a_{n-k} + b_k = p(n+1)$, pentru orice $n \geq 0$ şi orice $0 \leq k \leq n$ (unde p este un număr fixat, care nu depinde de n), avem:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} a_i \prod_{j=0}^{n-k-1} b_j}{k!(n-k)!} = p^n,$$

oricare ar fi $n \geq 1$ (convenţia de mai sus pentru produse rămâne valabilă). Pentru $a_n = 3n+1$ şi $b_n = 3n+2$ regăsim enunţul problemei **213**. Din păcate generalizarea nu ne duce prea departe de enunţul original, şirurile considerate trebuind să fie de forma $a_n = pn+s$, $b_n = pn+p-s$, aşa cum uşor se poate vedea, ca să verifice relaţiile de mai sus (necesare obţinerii relaţiei de recurenţă).

Soluţie dată de *Ioan Ghiţă*, profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj. Notăm cu S suma din enunţ. Desfacem sumele şi produsele pentru o bună observare:

$$S = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{1!\cdot 0!} + \frac{(1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-5))\cdot (2)}{(n-1)!\cdot 1!} + \frac{(1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-8))\cdot (2\cdot 5)}{(n-2)!\cdot 2!} +$$

$$+ \ldots + \frac{(1\cdot 4)\cdot (2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-7))}{2!(n-2)!} + \frac{(1)\cdot (2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4))}{1!(n-1)!} + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{0!\cdot 1!} =$$

$$= \frac{1}{n!}[C_n^0 (1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)) + C_n^1 (1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-5))\cdot (2) +$$

$$+ C_n^2 \cdot (1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-8))\cdot (2\cdot 5) + \ldots + C_n^{n-2}(1\cdot 4)\cdot (2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-7)) +$$

$$+ C_n^{n-1}(1)\cdot (2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)) + C_n^n (2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1))].$$

Fie funcţiile $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $g(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, indefinit derivabile pe $(0,\infty)$. Avem:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3^n} \cdot x^{-\frac{3n+1}{3}},$$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3^n} \cdot x^{-\frac{3n+2}{3}},$$ ceea ce se verifică uşor prin inducţie. Rezultă:

$$1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2) = \frac{f^{(n)}(1)\cdot 3^n}{(-1)^n}, \qquad 2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1) = \frac{g^{(n)}(1)\cdot 3^n}{(-1)^n}$$

şi apoi, folosind formula lui *Leibniz*:

$$S = \frac{1}{n!}\left[C_n^0 g(1) \frac{3^n \cdot f^{(n)}(1)}{(-1)^n} + C_n^1 \frac{3^{n-1}\cdot f^{(n-1)}(1)}{(-1)^{n-1}} \cdot \frac{3\cdot g'(1)}{(-1)^1} + C_n^2 \frac{3^{n-2}\cdot f^{(n-2)}(1)}{(-1)^{n-2}} \cdot \frac{3^2\cdot g''(1)}{(-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + C_n^n f(1) \frac{g^{(n)}(1)\cdot 3^n}{(-1)^n} = \frac{3^n}{(-1)^n n!}(f\cdot g)^n(1) \right] = \frac{3^n}{(-1)^n n!} h^{(n)}(1),$$

unde $h(x) = f(x)\cdot g(x) = x^{-1}$, este o funcţie indefinit derivabilă pe $(0,\infty)$ cu derivata de ordinul n:

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1}.$$

Rezultă $h^{(n)}(1)=(-1)^n\cdot n!$ şi apoi:

$$S=\frac{3^n}{(-1)^n\cdot n!}\cdot(-1)^n\cdot n!=3^n.$$

214. *Fie $s>0$, fixat. Fără utilizarea derivatelor, să se determine*:

$$L(s)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-(\mathrm{trig}1\cdot x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\cdot(\mathrm{trig}2\cdot x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}\dots(\mathrm{trig}n\cdot x)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right)}{x^2}\right),$$

unde $\mathrm{trig}\in\{\cos,\mathrm{ch}\}$.

(*În legătură cu problema* 147 *din G.M.-A, nr.* 2/2003).

Nicolae Pavelescu

Soluţia autorului. Să ne ocupăm pentru început cu calculul limitei:

$$L_n=L_n(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n)=\lim_{x\to 0}\frac{1-(\mathrm{trig}a_1\cdot x)^{b_n}\cdot(\mathrm{trig}a_2\cdot x)^{b_{n-1}}\cdot\ldots\cdot(\mathrm{trig}a_n\cdot x)^{b_1}}{x^2},$$

$n\in\mathbb{N}^*$.

Folosim succesiv o limită cu caracter teoretic, formalizată prin:

$$\lim_{\substack{u\to 1\\ v\to 0}}\frac{\ln u}{v}=\lim_{\substack{u\to 1\\ v\to 0}}\frac{u-1}{v}.$$

Avem:

$$L_n=-\lim_{x\to 0}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(\mathrm{trig}a_kx)^{b_{n-k+1}}-1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(\mathrm{trig}a_kx)^{b_{n-k+1}}\right)}{x^2}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{trig}a_kx)}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{trig}a_kx}{x^2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\cdot 2\mathrm{cotrig}^2\frac{a_kx}{2}}{x^2}=2\varepsilon\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{n-k+1}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{cotrig}\frac{a_kx}{2}}{\frac{a_kx}{2}}\right)^2\cdot\frac{a_k^2}{4}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k^2b_{n-k+1},$$

unde:

$$\varepsilon=\begin{cases}+1, & \mathrm{trig}=\cos\\ -1, & \mathrm{trig}=\mathrm{ch}\end{cases},\quad \mathrm{cotrig}=\begin{cases}\sin, & \mathrm{trig}=\cos\\ \mathrm{sh}, & \mathrm{trig}=\mathrm{ch}\end{cases}.$$

În cazul problemei propuse, avem:

$$L(s)=\lim_{n\to\infty}2\cdot L_n\left(1,2,\dots,n;\frac{1}{n^{s+2}},\frac{1}{(n-1)^{s+2}},\dots,\frac{1}{1^{s+2}}\right)=$$

$$=\varepsilon\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(n-k+1)^{s+2}}=\varepsilon\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)^2}{k^{s+2}}=$$

$$=\varepsilon\cdot\lim_{n\to\infty}(n+1)^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{s+2}}-2\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{s+1}}+\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}\right)=$$

$$=\varepsilon(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \mathrm{trig}=\cos\\ -\infty, & \mathrm{trig}=\mathrm{ch}\end{cases}.$$

Comentariu. Problema face parte, în mod evident, din aceeaşi categorie cu problema nr. **147** din G.M.-A nr. 2/2003, propusă de *Andrei Vernescu*.

Exceptând regula lui *l'Hospital*, care în enunţ este declarată prohibită, niciuna din metodele expuse pe larg în G.M.-A nr. 1/2004, pp. 75-79, nu poate fi folosită aici.

Soluţie dată de *Ioan Ghiţă*, profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj. a) Calculăm mai întâi următoarele limite:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-(\cos kx)^{\frac{1}{(n-k+1)^{s+2}}}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{kx}{2}\right)^{\frac{1}{(n-k+1)^{s+2}}}\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\left(1-2\sin^2\frac{kx}{2}\right)^{\frac{1}{(n-k+1)^{s+2}}}-1\right]}{-2\sin^2\frac{kx}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{kx}{2}}{\frac{k^2x^2}{4}}\cdot\frac{k^2x^2}{4}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{k^2}{(n-k+1)^{s+2}}.$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1-(\mathrm{ch}(kx))^{\frac{1}{(n-k+1)^{s+2}}}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[1-\left(1+2\mathrm{sh}^2\frac{kx}{2}\right)^{\frac{1}{(n-k+1)^{s+2}}}\right]}{x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\left(1+2\mathrm{sh}^2\frac{kx}{2}\right)^{\frac{1}{(n-k+1)^{s+2}}}-1\right]}{2\mathrm{sh}^2\frac{kx}{2}}\cdot\frac{2\mathrm{sh}^2\frac{kx}{2}}{x^2}=\frac{-4}{(n-k+1)^{s+2}}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sh}\frac{kx}{2}}{x}\right)^2=$$

$$=\frac{-4k^2}{(n-k+1)^{s+2}},$$

unde s-a folosit faptul că:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}\frac{kx}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{kx}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{kx}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{kx}{2}}\left(\mathrm{e}^{kx}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{kx}{2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{kx}-1}{kx}\cdot k=k.$$

De asemenea, s-a utilizat faptul că $\mathrm{ch}2x=1+\mathrm{sh}^2x$.

În continuare, presupunem că $\mathrm{trig}x=\cos x$ şi notăm cu $L_n(s)$ limita după x.

$$L_n(s)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[1-(\cos x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\cdot(\cos 2x)^{\frac{1}{(n+1)^{s+2}}}\cdot\ldots\cdot(\cos nx)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right]}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[1-(\cos x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}+(\cos x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}-(\cos x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\cdot(\cos 2x)^{\frac{1}{(n+1)^{s+2}}}\cdot\ldots\cdot(\cos nx)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right]}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[1-(\cos x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\right]}{x^2}+\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\cdot\frac{\left[1-(\cos 2x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}\cdot\ldots\cdot(\cos nx)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right]}{x^2}\overset{\text{a)}}{=}$$

$$\overset{\text{a)}}{=}\frac{1^2}{n^{s+2}}+1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\left[1-(\cos 2x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}+(\cos 2x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}-(\cos 2x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}\cdot\ldots\cdot(\cos nx)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right]}{x^2}.$$

Dacă se scade şi se adaugă pe rând câte un $(\cos kx)^{\frac{1}{(n-k+1)^{s-2}}}$, obţinem:

$$L_n(s)=\frac{1^2}{n^{s+2}}+\frac{2^2}{(n-1)^{s+2}}+\ldots+\frac{n^2}{1^{s+2}}.$$

Dacă $\mathrm{trig}x=\mathrm{ch}x$, atunci:

$$L_n(s)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[1-(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}+(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}-(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\cdot(\mathrm{ch}2x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}\cdot\ldots\cdot(\mathrm{ch}nx)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right]}{x^2}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left[1-(\text{ch}x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\right]}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{(\text{ch}x)^{\frac{1}{n^{s+2}}}\cdot 2\left[1-(\text{ch}2x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}\cdot\ldots\cdot(\text{ch}nx)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right]}{x^2} \overset{\text{b)}}{=}$$

$$\overset{\text{b)}}{=} \frac{-4\cdot 1^2}{n^2} + \lim_{x\to 0} \frac{2\left[1-(\text{ch}2x)^{\frac{1}{(n-1)^{s+2}}}\cdot\ldots\cdot(\text{ch}nx)^{\frac{1}{1^{s+2}}}\right]}{x^2}.$$

Analog, dacă se scade şi se adună câte un $(\text{ch}kx)^{\frac{1}{(n-k+1)^{s+2}}}$, rezultă:

$$L_n(s) = -4\left(\frac{1^2}{n^{s+2}} + \frac{2^2}{(n-1)^{s+2}} + \ldots + \frac{n^2}{1^{s+2}}\right).$$

Dar $\frac{1^2}{n^{s+2}} + \frac{2^2}{(n-1)^{s+2}} + \ldots + \frac{n^2}{1^{s+2}} > n^2$ şi deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^{s+2}} + \frac{2^2}{(n-1)^{s+2}} + \ldots + \frac{n^2}{1^{s+2}}\right) = \infty.$$

Urmează că:

$$L(s) = \lim_{n\to\infty} L_n(s) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă} \quad \text{trig} = \cos \\ -\infty, & \text{dacă} \quad \text{trig} = \text{ch} \end{cases}.$$

Nota redacţiei. O soluţie corectă a problemei a dat şi domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea.

215. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive astfel încât $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Să se arate că pentru $-\frac{n+1}{n-1} \leq r < 1$, avem:*

$$\frac{x_1}{x_1^r + x_2 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_2^r + \ldots + x_n} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n^r} \geq 1.$$

Vasile Cîrtoaje

Soluţia autorului. Aplicând inegalitatea *Cauchy-Schwarz*, avem:

$$\sum \frac{x_1}{x_1^r + x_2 + \ldots + x_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{\sum x_1(x_1^r + x_2 + \ldots + x_n)}.$$

Prin urmare, rămâne să arătăm că:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{\sum x_1(x_1^r + x_2 + \ldots + x_n)} \geq 1,$$

adică:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq x_1^{1+r} + x_2^{1+r} + \ldots + x_n^{1+r}.$$

Această inegalitate se obţine pe baza inegalităţii lui *Cebâşev* şi a inegalităţii mediilor. Astfel, pentru $-1 \leq r < 1$, avem:

$$\sum x_1^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum x_1^{1-r}\right)\left(\sum x_1^{1+r}\right) \geq (x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1-r}{n}} \sum x_1^{1+r} = \sum x_1^{1+r},$$

iar pentru $-\frac{n+1}{n-1} \leq r < -1$, avem:

$$\sum x_1^2 = \sum \frac{x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n-1} \geq \sum (x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{2}{n-1}} = \sum \frac{1}{x_1^{\frac{2}{n-1}}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{n}\left(\sum \frac{1}{x_1^{r+\frac{n+1}{n-1}}}\right)\left(\sum \frac{1}{x_1^{-r-1}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt[n]{(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{r+\frac{n+1}{n-1}}}} \sum \frac{1}{x_1^{-r-1}} = \sum x_1^{r+1}.$$

Cu aceasta, inegalitatea este demonstrată. Avem egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Nota redacţiei. O soluţie partială a problemei a dat şi domnul inginer *Marius Olteanu* de la S.C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu Vâlcea.

216. *Să se arate că există şiruri de funcţii* $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : [0,1] \to [0,1]$, *continue, care satisfac simultan următoarele proprietăţi*:

a) $\left(\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\geq 1}$ *converge la zero*;

b) *şirul* $(f_n(x))_{n\geq 1}$ *să nu conveargă pentru nici un* $x \in (0,1)$;

c) *fiecare funcţie să ia fiecare valoare strict pozitivă de cel mult două ori (i.e.* $|f_n^{-1}(\{\alpha\})| \leq 2$ *pentru orice* $\alpha \in (0,1]$ *şi orice* $n \in \mathbb{N}^*$).

Răzvan Iagăr

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o enumerare standard a numerelor raţionale din intervalul $(0,1)$:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{2}{4}, a_6 = \frac{3}{4}, a_7 = \frac{1}{5}, a_8 = \frac{2}{5}, a_9 = \frac{3}{5}\ldots$$

(desigur, unele numere se repetă, dar acest lucru nu ne deranjează). Dacă, pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, avem $a_n = \dfrac{p}{q}$, unde p şi q sunt întregi pozitivi, $p < q$, definim funcţia f_n prin:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \in \left[0, \dfrac{p-1}{q}\right] \\ q\left(x - \dfrac{p-1}{q}\right), & \text{pentru } x \in \left[\dfrac{p-1}{q}, \dfrac{p}{q}\right] \\ q\left(\dfrac{p+1}{q} - x\right), & \text{pentru } x \in \left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{p+1}{q}\right] \\ 0, & \text{pentru } x \in \left[\dfrac{p+1}{q}, 1\right] \end{cases}.$$

Continuitatea fiecărei funcţii f_n se verifică imediat, de asemenea faptul că:

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{q}$$

(de fapt, acestea se văd foarte bine geometric: graficul lui f_n este linia frântă $OABCD$, unde O este originea, iar punctele A, B, C, D au respectiv coordonatele $((p-1)/q, 0)$, $(p/q, 1)$, $((p+1)/q, 0)$ şi $(1,0)$; atunci integrala funcţiei f_n pe $[0,1]$ este egală cu aria triunghiului ABC, cu baza de lungime $2/q$ şi înălţimea 1). Cum şirul numitorilor numerelor a_n are limita ∞ rezultă că este îndeplinită prima condiţie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

De asemenea, graficul fiecărei funcţii f_n fiind format din două segmente „orizontale" (OA şi CD, aşezate pe axa Ox) şi două „oblice" (AB şi BC), este clar că f_n ia fiecare valoare pozitivă de cel mult două ori; de fapt, ia valoarea 1 doar o dată, în p/q, şi orice altă valoare din $(0,1)$ exact de două ori (şi, bineînţeles, ia valoarea 0 de o infinitate de ori). Ne mai rămâne să verificăm condiţia b).

Fie, pentru aceasta, $x \in (0,1)$. Dacă a_n este un număr de forma $1/q$, cu q suficient de mare încât să avem $2/q < x$, rezultă că x este în afara intervalului $(0, 2/q)$, în care f_n ia valori nenule. Altfel spus, există o infinitate de indici n astfel încât $f_n(x) = 0$.

Pe de altă parte, pentru fiecare întreg pozitiv q putem considera partea întreagă s a numărului $2qx$, adică s este acel număr întreg pentru care avem $s \leq 2qx < s+1$; iar dacă q este destul de mare, avem $s \geq 1$. Dacă s este par, $s = 2p$, avem:

$$2p-1<2p\le 2qx<2p+1,$$

iar pentru $s=2p-1$ (impar):

$$2p-1\le 2qx<2p<2p+1;$$

oricum, vedem că pentru orice întreg pozitiv q (suficient de mare) găsim un număr natural $1\le p<q$ astfel încât:

$$2p-1\le 2qx<2p+1 \Leftrightarrow \frac{p}{q}-\frac{1}{2q}\le x<\frac{p}{q}+\frac{1}{2q}.$$

O verificare simplă prin calcul (sau o scurtă privire asupra graficului) arată că pentru n astfel încât a_n să fie egal cu un asemenea p/q avem $f_n(x)\ge 1/2$. Prin urmare şirul $(f_n(x))_{n\ge 1}$ are atât un subşir cu toţi termenii 0, cât şi un subşir cu toţi termenii mai mari sau egali cu $1/2$, deci nu are cum să fie convergent (iar asta se întâmplă pentru un $x\in(0,1)$ ales arbitrar); astfel şi condiţia b) este îndeplinită de şirul de funcţii pe care l-am construit şi problema este rezolvată.

217. *Fie x, y, z numere reale astfel încât $S=x+y+z>0$. Să se arate că are loc inegalitatea:*

$$9((x+y+z)(xy+yz+zx)-9xyz)\le(\ge)2((x+y+z)^3-27xyz),$$

sensul inegalităţii fiind după cum două dintre numerele x, y, z sunt mai mici sau egale cu $\frac{S}{3}$ (respectiv două dintre numerele x, y, z sunt mai mari sau egale cu $\frac{S}{3}$).

Marian Tetiva

Soluţia autorului. Este clar că, dacă avem $x\le\frac{S}{3}$, $y\le\frac{S}{3}$, $z\le\frac{S}{3}$ (sau $x\ge\frac{S}{3}$, $y\ge\frac{S}{3}$, $z\ge\frac{S}{3}$), atunci, în mod necesar, $x=y=z$ $\left(=\frac{S}{3}\right)$ şi între cei doi membri ai inegalităţilor din enunţ avem semnul egal. De aceea, singurele cazuri interesante rămân cele două din enunţ; vom considera unul dintre ele, de pildă să presupunem că $x\le\frac{S}{3}$, $y\le\frac{S}{3}$ şi $z\le\frac{S}{3}$ şi să arătăm că:

$$9\big((x+y+z)(xy+xz+yz)-9xyz\big)\le 2\big((x+y+z)^3-27xyz\big).$$

Să notăm:

$$a=\frac{3x}{S},\quad b=\frac{3y}{S},\quad c=\frac{3z}{S}.\quad \text{Atunci}\quad a+b+c=3,\quad a\le 1,\ b\le 1\quad \text{şi}\quad c\le 1.$$

Inegalitatea de demonstrat este atunci echivalentă cu:

$$9\left(\left(\frac{aS}{3}+\frac{bS}{3}+\frac{cS}{3}\right)\left(\frac{abS^2}{9}+\frac{acS^2}{9}+\frac{bcS^2}{9}\right)-9\cdot\frac{abcS^3}{27}\right)\le$$
$$\le 2\left(\left(\frac{aS}{3}+\frac{bS}{3}+\frac{cS}{3}\right)-27\cdot\frac{abcS^3}{27}\right),$$

deci cu (să nu uităm că $S>0$ şi $a+b+c=3$):

$$ab+ac+bc-3abc\le 2(1-abc)\Leftrightarrow ab+ac+bc\le 2+abc.$$

Acum fie $A=a-1$, $B=b-1$ şi $C=c-1$; rezultă că:

$$A+B+C=0\quad \text{şi}\quad A\le 0,\ B\le 0,\ C\ge 0,$$

iar inegalitatea de demonstrat se transformă în:

$$(A+1)(B+1)+)A+1)(C+1)+(B+1)(C+1)\le 2+(A+1)(B+1)(C+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB+AC+BC+2(A+B+C)+3\le 2+ABC+AC+BC+A+B+C+1\Leftrightarrow 0\le ABC.$$

Inegalitatea la care am ajuns fiind evidentă, demonstraţia este încheiată în acest caz; dacă două dintre numere sunt $\ge\frac{S}{3}$ (şi al treilea $\le\frac{S}{3}$) vom avea două dinte numerele A, B, C pozitive şi al treilea negativ, deci produsul $ABC\le 0$ şi sensul se schimbă peste tot.

Soluţie dată de *Nicuşor Minculete*, profesor la Colegiul Naţional Mihai Viteazul din Sf. Gheorghe. Fie:

$$E(x,y,z)=2((x+y+z)^3-27xyz)-9\left((x+y+z)(xy+yz+zx)-9xyz\right).$$

Cum $x+u+z=S$, avem $E(x,y,z)=2S^3-9S(xy+yz+zx)+27xyz$, deci:

$$E(x,y,z)=-S^3+3S^3-9S(xy+yz+zx)+27xyz=$$
$$=-27\left[\left(\frac{S}{3}\right)^3-(x+y+z)\left(\frac{S}{3}\right)^2+(xy+yz+zx)\cdot\frac{S}{3}-xyz\right]=$$
$$=-27\left(\frac{S}{3}-x\right)\left(\frac{S}{3}-y\right)\left(\frac{S}{3}-z\right).$$

Dacă două dintre numerele x, y, z sunt mai mici sau egale cu $\frac{S}{3}$, atunci $E(x,y,z)\geq 0$, iar dacă două dintre numerele x, y, z sunt mai mari sau egale cu $\frac{S}{3}$, atunci $E(x,y,z)\leq 0$.

Observaţii. a) Condiţia $S=x+y+z>0$ este inutilă.

b) Egalitatea are loc când unul dintre numerele x, y, z este egal cu $\frac{S}{3}$.

$$9((x+y+z)(xy+yz+zx)-9xyz)\leq(\geq)2((x+y+z)^3-27xyz),$$

Nota redacţiei. O soluţie asemănătoare cu cea de mai sus a dat *Ioan Ghiţă*, profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj. De asemenea, o soluţie corectă, dar calculatorie, a dat domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

ISTORIA MATEMATICII

Tiberiu Popoviciu (1906-1975)[1)]

de Marioara Costăchescu

Tiberiu Popoviciu este un savant de renume mondial. Prin lucrările sale, prin lecţiile şi seminariile ştiinţifice pe care le-a condus, a creat o şcoală românească de Analiză numerică.

A fost un mare specialist în Analiza matematică, Teoria aproximării, Teoria convexităţii, Analiza numerică, Teoria ecuaţiilor funcţionale, Aritmetică, Teoria numerelor şi Teoria calculului.

Teza sa de doctorat, elaborată sub îndrumarea profesorului *Paul Montel*, la Paris, conţine bazele Teoriei funcţiilor convexe de ordin superior. Noţiunea de funcţie convexă de ordin superior, apare în teoria lui *Tiberiu Popoviciu* ca rezultat al studierii comportării faţă de o clasă specială de funcţii, cea a polinoamelor de un grad dat. Acest concept stă la baza cercetărilor pe care le-a făcut *Tiberiu Popoviciu* în:

- studiul reprezentării unei funcţii liniare $A: C[a,b]\to\mathbb{R}$ de grad de exactitate n care nu se anulează pe nici o funcţie $f\in C[a,b]$, convexă de ordinul n pe $[a,b]$;
- studiul comportării polinoamelor de cea mai bună aproximare ale funcţiilor din $C[a,b]$ convexe sau concave de un ordin precizat;
- studiul restului în procedeele liniare de aproximare.

Şcoala întemeiată de *Tiberiu Popoviciu* a devenit cunoscută şi dincolo de hotarele României, nu numai prin numeroasele lucrări publicate de el şi de elevii săi, ci şi prin cele 6 colocvii şi două seminarii cu participare internaţională organizate între anii 1957 şi 1975 în cadrul Institutului de Calcul din Cluj al Academiei Române, al cărui fondator a fost.

De numele lui *Tiberiu Popoviciu* se leagă prima monografie de teoria convexităţii, cunoscuta carte „Les Fonctions Convexes". Deosebit de valoroase pentru învăţământul românesc au fost: cartea de Analiză numerică şi cursurile de Analiză reală, de Matematici superioare, de Algebră şi de Analiză matematică scrise de *Tiberiu Popoviciu*.

[1)] Prezentul material ar fi trebuit să apară în mod normal în cadrul rubricii noastre din nr. 4/2006, când a avut loc centenarul naşterii regretatului academician *Tiberiu Popoviciu*. Din păcate, ne-a parvenit târziu, după intrarea la tipar a revistei. Ne facem, totuşi, o datorie de onoare în a-l publica, chiar cu întârziere.

Profităm de această notă de subsol pentru a-i adresa doamnei profesoare *Mărioara Constantinescu* mulţumirile noastre, pentru frumoasele cuvinte de apreciere a Cursurilor de vară organizate de S.S.M.R. la Buşteni conţinute în scrisoarea de trăsură a prezentului material. (N.R.)

Cea mai lungă perioadă din activitatea sa didactică şi de cercetare, *Tiberiu Popoviciu* a petrecut-o la Cluj. Aici s-a ocupat de creşterea, din rândul tineretului, a unor valoroşi cercetători, un rol important jucându-l „Seminarul de Teoria Aproximării cu aplicaţii la Analiza Numerică“, înfiinţat de el, în 1946, anul venirii sale la Cluj.

Institutul de Calcul din Cluj a luat fiinţă în 1957, în baza Hotărârii Sesiunii Generale a Academiei, ca urmare a demersurilor făcute de *Tiberiu Popoviciu*, pe care l-a avut ca director până la desfiinţare, în 1975, prin decretul care punea capăt activităţii celor trei institute de matematică din ţară ale Academiei.

Activitatea sa la Institutul de Calcul a avut o puternică influenţă şi asupra muncii didactice. Acest lucru s-a concretizat prin predarea primelor cursuri de Limbaje de programare şi Maşini de Calcul din ţară.

În legătură cu rezultatele deosebite obţinute sub conducerea lui *Tiberiu Popoviciu* în domeniul tehnicii de calcul şi informaticii se pot menţion următoarele:

• În anul 1961, la Institutul de Calcul din Cluj, se termină calculatorul DACICC-l (Dispozitiv Automat de Calcul al Institutului de Calcul din Cluj) care devine un nume cunoscut al primei generaţii de calculatoare româneşti. DACICC-l făcea parte din generaţia a doua de calculatoare complet tranzistorizate.

• În 1969 s-a realizat la Cluj cel mai performant calculator de concepţie românească din perioada anilor 1960-1970.

DACICC-200 realiza 200.000 operaţii aritmetice/secundă, ceea ce era o performanţă la vremea respectivă. Din punct de vedere tehnologic DACICC-200 aparţinea generaţiei a doua de calculatoare, dar el conţinea multe elemente şi concepte ale generaţiei a treia (lungimea cuvântului era de 32 biţi, memoria era organizată în octeţi adresabili cu control de paritate, dispunea de un sistem hardware de tratare a întreruperilor, de o serie de mecanisme de execuţie paralelă a operaţiilor printre care pregătirea şi execuţia instrucţiunilor etc.). Din punct de vedere software, la DACICC-200 apare pentru prima dată la noi în ţară, noţiunea de sistem de operare pentru un calculator de concepţie proprie. Sistemul de operare al calculatorului DACICC-200, conţinea un monitor care realiza gestiunea perifericelor, tratarea întreruperilor precum şi gestiunea regimului de lucru multitasking. Sistemul cuprindea de asemenea un compilator FORTRAN, două asambloare pentru două limbaje de programare (PAS şi MOL), un încărcător şi un bibliotecar.

Un aport deosebit de important în dezvoltarea matematicii clujene l-au avut seminariile de cercetare ale Institutului, seminarii care şi-au continuat activitatea şi după desfiinţarea Institutului.

Altă realizare remarcabilă a lui *Tiberiu Popoviciu* a fost reactivarea, în 1958, a revistei „Mathematica“ şi înfiinţarea în 1972 a revistei „Revue d'analyse numerique et la Théorie de L'approximation“.

A înfiinţat, în 1967, „Seminarul Itinerant de ecuaţii funcţionale“ transformat apoi în „Seminarul Itinerant de ecuaţii funcţionale, aproximare şi convexitate“ ale cărui sesiuni anuale se desfăşoară şi astăzi.

A organizat, în calitatea sa de preşedinte al filialei din Cluj a Societăţii de Ştiinţe Matematice, consfătuiri cu profesorii de liceu, în mai multe oraşe din Transilvania (Braşov, Cluj, Arad, Satu Mare), pentru introducerea elementelor de tehnică de calcul în învăţământul preuniversitar.

A fost un matematician activ şi creator până la brusca sa dispariţie, în 1975, la nici jumătate de an de la desfiinţarea Institutului pe care l-a creat şi condus.

Bibliografie

[1] www.c.s.ubbcluj.ro.

[2] www.atic.ora.ro.

[3] www.academieromana.ro.

Liceul cu Program Sportiv din Roman

A XXXIII-a Sesiune de comunicări metodico-ştiinţifice a Filialei Prahova a S.S.M.R.

Sâmbătă 21 octombrie 2006 a avut loc a XXXIII-a Sesiune de comunicări metodico-ştiinţifice a Filialei Prahova a S.S.M.R. Ea s-a desfăşurat, ca şi în precedenţii trei ani, pe două secţiuni, fiind găzduită la hotelul Mara din localitate, în cele două săli de conferinţe ale sale.

Sesiunea a avut un caracter comemorativ, marcând – cu acest prilej – un an de la dispariţia profesorului *Adrian Ghioca* – cel ce a fost, de-a lungul timpului, animatorul entuziast şi neobosit al acesteia.

Lucrările au debutat cu o şedinţă în plen, dedicată comemorării, în cadrul căreia au fost rostite alocuţiuni menite să evoce personalitatea profesorului *Adrian Ghioca*. Printre cei care au vorbit, cu acest prilej, se numără prof. *Nicolae Angelescu* – inspector de specialitate şi vicepreşedinte al filialei, prof. *Petre Năchilă* – vicepreşedinte al filialei, prof. *Mariana Cojoianu* – directoare adjunctă a Colegiului Mihail Cantacuzino din localitate, prof. univ. dr. *Miron Oprea*, prof. *Olimpia Popescu* şi semnatarul acestor rânduri.

În final i-au fost decernate, *post mortem*, profesorului *Adrian Ghioca* două diplome: o diplomă de excelenţă pentru sprijinul acordat în ultimii 10 ani la organizarea Cursurilor la Buşteni pentru perfecţionarea profesorilor de matematică – diplomă acordată de conducerea centrală a S.S.M.R. –, precum şi o diplomă pentru activitatea depusă în cadrul Filialei S.S.M.R. Prahova – diplomă acordată de conducerea filialei. Diplomele au fost înmânate atât familiei cât şi conducerii Colegiului Mihail Cantacuzino al cărui director a fost – un mare număr de ani – profesorul *Adrian Ghioca*.

În continuare au fost prezentate, în plen, următoarele comunicări, dedicate memoriei decedatului:

1. prof. univ. dr. *Horea Banea* (Universitatea Transilvania din Braşov): „Asupra unei probleme a lui Adrian P. Ghioca";
2. prof. univ. dr. *Miron Oprea* (Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti): „Secţiunea de aur între mit şi realitate";
3. conf. univ. dr. *Eugen Păltănea* (Universitatea Transilvania din Braşov): „Asupra unor inegalităţi trigonometrice";
4. conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* (Universitatea Valahia din Târgovişte): „Asupra unor integrale".

Lucrările, apoi, s-au desfăşurat (din cauza numărului mare) pe două secţiuni.

Prima secţiune a avut ca moderatori pe prof. univ. dr. *Ion D. Ion*, prof. univ. dr. *Miron Oprea* şi conf. univ. dr. *Eugen Păltănea*; ea a reunit următoarele comunicări:

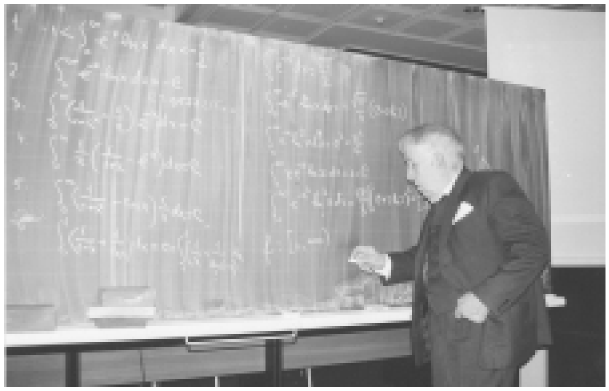
1. prof. univ. dr. *Ion D. Ion* (Universitatea din Bucureşti): „Monoidul endomorfismelor unei S-mulţimi libere";
2. prof. univ. dr. *Miron Oprea* (Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti): „Asupra unor clase de probleme de geometrie combinatorică";
3. prof. univ. dr. *Constantin Marinescu* (Universitatea Transilvania din Braşov): „Probleme de extrem în geometrie";
4. conf. univ. dr. *Cristinel Mortici* (Universitatea Valahia din Târgovişte): „Câteva probleme cu şiruri fără epsilon";
5. prof. *Mircea Trifu* (secretar general al S.S.M.R, Bucureşti): „Centenar Dumitru Mangeron";
6. prof. *Mihai Gavriluţ* (Roman): „Observaţii asupra unei inegalităţi din culegerea lui Adrian P. Ghioca";
7. prof. *Alexandru Popescu-Zorica* (Bucureşti): „Diverse şi altele";
8. prof. *Anghel Dafina* (Colegiul Naţional Nicolae Iorga din Vălenii de Munte): „Imaginaţia în problemele de loc geometric";
9. prof. *Cristina Dumitrescu* (Colegiul Mihail Cantacuzino din Sinaia): „Proiectarea didactică – rigoare şi flexibilitate în atingerea idealului educaţional";
10. prof. *Avram Corneliu Mănescu* (Liceul teoretic din Azuga): „Asupra formulelor lui Stirling şi Wallis";

11. prof. *Radu Vişinescu* (Colegiul Naţional I. L. Caragiale din Ploieşi): „Consideraţii privind teorema lui Lagrange“;

12. prof. *Mihaela Alexandra Ghidu* (Liceul Pedagocic din Ploieşti), prof. *Maria Ionescu* (Colegiul Tehnic Lazăr Edeleanu din Ploieşti): „Descentralizarea – o provocare a învăţământului preuniversitar românesc“;

13. prof. *Ion Nedelcu* (Colegiul Naţional Mihai Viteazul din Ploieşti): „Posibilităţi de determinare a unor grupuri izomorfe“;

14. *Gheorghe Bumbăcea* (Şcoala generală nr. 1 din Buşteni): „Geometria patrulaterului circumscriptibil şi inscriptibil“.



Profesorul Al. Popescu-Zorica susţinându-şi comunicarea prezentată la sesiune.

Cea de a doua secţiune a avut ca moderatori pe prof. univ. dr. *Constantin Popovici*, conf. univ. dr. *Cristinel Mortici* şi conf. univ. dr. *Andrei Vernescu*. În cadrul ei s-au prezentat următoarele comunicări:

1. prof. univ. dr. *Constantin Popovici* (Universitatea din Bucureşti): „Algoritm pentru determinarea numerelor perfecte“;

2. lector univ. dr. *Dinu Teodorescu* (Universitatea Valahia din Târgovişte): „Inegalităţi elementare în probleme de convergenţă“;

3. prof. *Olimpia Popescu* (Ploieşti): „Noţiunea de modul în matematica gimnazială“;

4. prof. *Adrian Lungu* (Grupul şcolar energetic din Câmpina): „O aplicaţie a matematicii existenţiale“;

5. prof. *Silvia Berbeceanu* (Grupul Şcolar din Plopeni), prof. *Ion Berbeceanu* (Şcoala generală Carol I din Plopeni): „Curriculum de decizia şcolii – un model de curs opţional pentru clasa a XI-a“;

6. prof. *Florin Smeureanu* (Inspector Şcolar al judeţului Vâlcea): „Progresii aritmetice formate din numere prime“;

7. prof. *Adrian Stroe* (Liceul Mihai Viteazul din Caracal): „Asupra unui şir remarcabil“;

8. prof. *Ioana Crăciun*, prof. *Gheorghe Crăciun* (Şcoala generală Carol I din Plopeni)): „Revista „Axioma – supliment matematic“ în peisajul publicistic românesc“;

9. prof *Radu Simion* (Colegiul Naţional Mihai Viteazul din Ploieşti): „Relaţia lui Sylvester în plan, în spaţiu şi generalizare în $\mathbb{R}^n$“;

10. prof. *Roxana Soare* (Liceul Nichita Stănescu din Ploieşti): „Structuri algebrice determinate pe submulţimi ale lui $\mathbb{C}$“;

11. prof. *Constantin Soare* (Liceul Nichita Stănescu din Ploieşti): „Aplicaţii ale numerelor complexe în studiul polinoamelor regulate“;

12. prof. drd. *Maria Stoica* (Liceul Nichita Stănescu din Ploieşti): „Seria armonică. Proprietăţi“;

13. prof. *Roxana Lică* (Grupul şcolar energetic din Ploieşti): „Aplicarea metodelor de predare centrate pe elev în matematică“;

14. prof. *Adelina Apostol* (Şcoala generală Nicolae Iorga din Ploeişti): „Aplicaţii ale relaţiilor metrice în triunghi şi patrulater“.

Lucrările sesiunii au reunit un număr foarte mare de participanţi – credem, peste 120 – care au audiat cu deosebit interes comunicările, luând parte activă la discuţii şi având intervenţii pertinente.

Organizatorii sesiunii au fost, ca de obicei, Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova şi Filiala S. S. M. R. Prahova. Din partea conducerii centrale a S.S.M.R. au participat prof. *Mircea Trifu* – secretar general şi semnatarul acestor rânduri.

În fine, un ultim cuvânt de mulţumire trebuie să adresăm profesorului *Constantin Bucur*, directorul Colegiului Mihail Cantacuzino din Sinaia, care s-a dovedit a fi o gazdă deosebit de amabilă şi primitoare.

Dan Radu

Diplomele de excelenţă ale S. S. M. R. pe anul 2006

Biroul Consiliului S.S.M.R. a instituit acordarea **Diplomei de excelenţă** în fiecare an, începând cu anul 2006. Aceasta reprezintă, potrivit Regulamentului de acordare a diplomei, recunoaşterea de către Societatea de Ştiinţe Matematice din România (S.S.M.R.) a meritului acelor cadre didactice care, cu talent şi perseverenţă, şi-au dăruit întreaga viaţă cultivării învăţământului matematic românesc şi ale căror cariere de excepţie constituie modele demne de urmat pentru generaţiile următoare.

Comisia, formată din patru membri (prof. univ. dr. *Dan Brânzei*, conf. univ. dr *Eugen Păltănea*, prof. *Nicolae Sanda* şi prof. dr. *Marcel Ţena*) şi având ca preşedinte pe prof. univ. dr. *Dorin Popescu*, a analizat propunerile primite şi a decis prin consens ca, pentru anul 2006, diploma să fie acordată următorilor: acad. *Petru T. Mocanu*, prof. univ. dr. *Horea Banea*, prof. univ. dr. *Alexandru Lupaş*, prof. univ. dr. *Mirela Ştefănescu*, prof. *Laura Constantinescu*, prof. *Liliana Niculescu* şi prof. *Gheorghe Szöllösy*.

Se cuvine o scurtă prezentare a activităţii laureaţilor.

Acad. dr. PETRU T. MOCANU
Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca

S-a născut la 1 iunie 1931, la Brăila, oraş în care urmează cursurile preuniversitare. Începând cu anul 1950 se înscrie la Facultatea de Matematică a Universităţii din Cluj, pe care o absolvă în 1953. De această cetate culturală şi ştiinţifică a Ardealului îşi leagă definitiv viaţa şi activitatea. Ocupă, pe rând, toate funcţiile unei cariere universitare de excepţie: asistent (1953-1957), lector (1957-1962), conferenţiar (1962-1970) şi, după 1970, profesor universitar.

La sugestia şi sub îndrumarea maestrului său, acad. *Gh. Călugăreanu*, îşi susţine, în anul 1958, teza de doctorat cu titlul „Metoda variaţională în studiul funcţiilor univalente". Acestui domeniu al analizei complexe îi dedică cea mai mare parte din activitatea sa ştiinţifică, devenind specialist de prim rang în domeniu. În perioada 1966-1984 şi 1999-2000 este şeful catedrei de teoria funcţiilor, urmaş de drept al ilustrului său înaintaş, profesorul Călugăreanu.

A predat Analiză complexă (curs de bază), dar şi alte cursuri speciale (Funcţii univalente, Teoria geometrică a funcţiilor, Spaţii Hardy etc.).

A fost profesor vizitator la Institutul Politehnic din Conakry (Guineea) şi la Bowling Green State University, Ohio, S.U.A.

A îndeplinit între anii 1968-1976 şi 1984-1987, funcţia de decan al Facultăţii de Matematică, iar apoi, în perioada 1990-1992 pe aceea de prorector al universităţii clujene.

Este Doctor Honoris Causa al Universităţilor din Sibiu şi Oradea, este membru corespondent al Academiei Române din 1992, membru al Societăţii Americane de Matematică (A.M.S.) şi membru al Societăţii de Ştiinţe Matematice din România (chiar de la înfiinţarea Filialei Cluj a Societăţii în 1964). A fost preşedintele acestei filiale şi apoi, timp de două legislaturi, între 1996-2003, a fost preşedintele S.S.M.R.

Este redactor şef al revistei clujene Mathematica şi membru în comitetele de redacţie ale revistelor Studia UBB şi Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie.

S-a îngrijit de apariţia volumului „Gheorghe Călugăreanu, Opere alese", Editura Academiei, 1992. Din anul 1972 a fost coordonator a peste 35 lucrări de doctorat. În reviste internaţionale de prestigiu a publicat un număr de 50 de articole, iar în reviste româneşti, 125 de articole. Multe din rezultatele proprii sunt citate, utilizate sau extinse în peste 500 de articole sau teze de doctorat de peste 250 de autori.

A rămas legat şi de matematicile elementare. Exemplificăm prin articolul „Observaţii privind calculul unor integrale" – în Revista de matematică a elevilor din Transilvania (1994) şi, mai ales, prin materialele prezentate la seminarul de Didactica Matematicii.

În Gazeta Matematică a publicat „Despre o teoremă de acoperire în clasa funcţiilor univalente", pecum şi articole comemorative (*Gh. Călugăreanu*) sau aniversare (*Cabiria Andreian-Cazacu*).

Om de o vastă cultură în domenii incluzând: matematica, literatura, muzica (este un reputat violonist), profesorul *Petru Mocanu* este un om de o mare modestie şi bunătate.

În vara anului 2006 a fost sărbătorit la cei 75 de ani de viaţă. Au fost de faţă persoane reprezentative din conducerea Universităţii şi a Facultăţii clujene, delegaţi ai altor universităţi din ţară, reprezentanţi ai Academiei Române. Cu această ocazie i s-a înmânat **Diploma de excelenţă** a S.S.M.R.

Prof. univ. dr. HOREA BANEA
Universitatea Transilvania din Braşov

S-a născut la 27 septembrie 1934 în oraşul Cluj. Studiile universitare le urmează la Facultatea de Matematică şi Fizică a Universităţii din Bucureşti (1952-1957), iar după absolvire funcţionează ca preparator la Catedra de Matematică a Institutului Politehnic din Braşov (1957-1958). O perioadă este profesor la Şcoala tehnică postliceală Steagul Roşu şi la Liceul teoretic Andrei Şaguna din Braşov (până în 1970), apoi lector la I.C.P.P.D., filiala Braşov (1970-1979), lector (1979-1990) şi conferenţiar (1990-2003) la Universitatea Transilvania din acelaşi oraş. În anul 2003 este numit, prin ordin al ministrului, profesor universitar onorific. La 11 septembrie 2004, Catedra de ecuaţii a Facultăţii de Matematică-Informatică a universităţii braşovene îl sărbătoreşte pe prof. univ. dr. *Horea Banea*, printr-o sesiune ştiinţifică jubiliară, cu prilejul împlinirii vârstei de 70 de ani şi a ieşirii la pensie (1 octombrie 2004).

În anul 1974 susţine teza de doctorat cu titlul „Ecuaţii diferenţiale de ordin neîntreg". În referatul asupra lucrării, conducătorul ştiinţific, acad. *Miron Nicolescu*, scria „... Curentul general al cercetării matematice apare ca un şuvoi puternic care duce cu el aproape întreaga încărcătură a gândirii matematice. Din loc în loc, totuşi, de-a lungul albiei principale a acestui şuvoi apar încercări de evadare. Unele sunt repede abandonate. Altele sunt continuate, pe linii secundare, întreţinute de convingerea celor care le efectuează că va veni vremea în care astfel de cercetări vor fi integrate în curentul general al cercetării". Atât intuiţia autorului privind alegerea subiectului, cât şi aprecierile profesorului *Miron Nicolescu* au fost confirmate chiar în anul susţinerii tezei (coincidenţă!) de Conferinţa internaţională „Fractional Calculus and its applications" desfăşurată la New York, dar şi de lucrări de mai târziu (a se vedea, de exemplu, monografiile „Integrale şi derivate de ordin fracţionar şi unele aplicaţii ale lor", *S.G. Samco*, *A.A. Kilbas*, *O. I. Maricev*, 688 pag, 1987, „Fractional differential equation", 1998).

Să menţionăm aici, ca „incident" amuzant-amar, referatul făcut articolului „Sur l'interpretation de l'operateur de dérivation d'ordre fractionnaire" trimis Bulletin-ului editat de S.S.M.R. în anul 1978: „... Ţinând seama că observaţia cuprinsă în articol poate prezenta interes, fie şi ca o curiozitate, recomandăm publicarea ...“.

Pe lângă această temă, activitatea ştiinţifică a domnului profesor s-a realizat pe alte două direcţii: Ecuaţii diferenţiale cu parametru mic pe lângă derivatele de ordin superior şi Metodica predării matematicii. O bună parte a activităţii este legată de unele aspecte ale învăţământului matematic, fie ele cercetări de natură metodică, fie de pregătire a elevilor pentru matematica de performanţă, fie de perfecţionarea profesorilor din învăţământul preuniversitar. A condus peste 100 de lucrări pentru obţinerea gradului didactic I, unele dintre acestea transformându-se în cărţi tipărite (menţionăm aici doar lucrările regretaţilor profesori *Oliver Konnerth*, „Greşeli tipice în învăţarea analizei matematice“, 1982 şi *Florin Cârjan*, „Să învăţăm geometrie“, 1984, la cel din urmă fiind cooptat şi în comisia de doctorat). A organizat conferinţe de matematici pentru profesori, având invitaţi de seamă: *Florica Câmpan*, *Ciprian Foiaş*, *Solomon Marcus*, *N. N. Mihăileanu*, *Alexandru Popescu-Zorica*. A făcut parte din comisiile pentru realizarea programelor în vederea obţinerii gradelor didactice şi din cele de examen.

În vederea pregătirii elevilor pentru concursurile de matematică a tradus două cărţi de referinţă: „Probleme de matematică din revista sovietică Kvant“, 1983 şi „Olimpiadele matematice ruseşti“, 1993-2002, 2004. De menţionat că volumul al doilea al primei lucrări nu a mai văzut lumina tiparului. El a circulat pe foi dactilografiate în cadrul taberelor de pregătire a elevilor pentru etapa finală a olimpiadei. În prezent este preşedintele concursului „Laurenţiu Duican“, dincolo de funcţie ascuzându-se de fapt (chiar dacă nu este singur) responsabilitatea selecţionării problemelor propuse.

A sprijinit publicaţiile Societăţii, realizând, sub redacţia filialei Braşov a S.S.M.R., mai multe numere ale Gazetei Matematice, seria B (fiind până în 1996, membru în Comitetul de redacţie al acestei reviste), sau propunând articole metodice pentru Gazeta Matematică, seria A.

Este autorul unor lucrări legate de problemele propuse între anii 1976-1995 la examenele profesorilor de matematică sau de metodică („Metodica predării matematicii“, 1998).

A participat cu lucrări (referate, comunicări) la activităţile organizate de filialele S.S.M.R. Braşov, Sibiu, Sf. Gheorghe, Râmnicu Sărat, Prahova, Tulcea. Până în 1991, timp de 15 ani, a deţinut funcţia de vicepreşedinte al Filialei Braşov a S.S.M.R., iar timp de trei ani (1995-1998) a făcut parte din Consiliul Societăţii. În prezent este preşedinte de onoare al Filialei Braşov.

„Întrucât ... am avut mai multe activităţi cu profesorii şi studenţii (unii au ajuns profesori remarcabili), aş putea, forţând lucrurile, să-mi atribui o infimă părticică din succesele avute de elevii lor, despre care unii m-au informat, dar această tranzitivitate de merite reprezintă doar firul de legătură între generaţiile succesive de dascăli“, notează undeva, domnul profesor cu fineţe şi modestie.

Diploma de excelenţă a S.S.M.R. i-a fost înmânată la Sinaia, în cadrul celei de-a XXXIII-a Sesiune metodico-ştiinţifică organizată de Filiala Prahova a Societăţii.

Prof. univ. dr. ALEXANDRU LUPAŞ
Universitatea Lucian Blaga din Sibiu

S-a născut la 5 ianuarie 1942 în oraşul Arad. După absolvirea Facultăţii de Matematică a Universităţii din Cluj (1964), funcţionează ca cercetător ştiinţific principal la Institutul de Calcul al Academiei Române, Filiala Cluj, şi la Institutul de Tehnică de Calcul din aceeaşi localitate până în 1976. Devine lector la Institutul de Învăţământ Superior din Sibiu, Facultatea de Mecanică (1976-1980), apoi conferenţiar (1980-1990) şi profesor la Universitatea Lucian Blaga, Facultatea de Ştiinţe, Catedra de Matematică. De-a lungul anilor, acoperă prin preocupările domniei sale domenii de interes ca: Analiză matematică, Matematici economice, Matematici financiare şi actuariale, Teoria aproximării, Analiză matematică, Funcţii speciale, Securizarea datelor.

Primeşte titlul de doctor în ştiinţele naturii, specializarea matematică (cu distincţie) la Universitatea din Stuttgart, în 1972, iar, în anul 1976, titlul de doctor în matematici la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj, cu lucrarea „Contribuţii la teoria aproximării prin operatori liniari".

A absolvit Institutul Goethe (1971) şi a fost bursier Humboldt la Universităţile din Stuttgart şi Dortmundt. Activitatea ştiinţifică se concretizează în peste 100 de articole publicate în reviste de prestigiu din ţară şi străinătate, citate de peste 250 de autori, a şase monografii şi a zece cursuri universitare. Din anul 1994 este conducător de lucrări de doctorat (8 doctori şi 5 doctoranzi). A fost invitat să conferenţieze în Germania, Bulgaria, Suedia. A participat cu lucrări la Congresul Internaţional al Matematicienilor din 1968 de la Moscova. Este referent ştiinţific la prestigioasele reviste Mathematical Reviews şi Zentralblatt für Mathematik. A organizat Simpozionul Naţional de Inegalităţi (4 ediţii, începând din 1981), a iniţiat şi organizat Ro Ger-Seminar (6 ediţii).

Activitatea domnului profesor a fost apreciată cu distincţii ca: Medalia jubiliară a S.S.M.R. (Centenarul Gazetei Matematice 1995), Ordinul Meritul pentru învăţământ în grad de ofiţer (2004), Medalia de argint pentru merite în învăţământ a Rectoratului Universităţii Lucian Blaga din Sibiu (2005).

Împătimit filatelist şi bibliofil, are importante semnalări la revistele Curierul Filatelic şi Filatelia. A îndeplinit importante funcţii: rector interimar al Universităţii din Sibiu (1990), Decan al Facultăţii de Ştiinţe de la aceeaşi universitate (1990-1992).

A rămas un pasionat al matematicilor elementare, dovadă fiind numeroasele note, articole şi probleme publicate în Gazeta Matematică (ambele serii), RMT. Este deja foarte cunoscută nota „Asupra problemei 579 din Gazeta Matematică" (GMB-8/1976) în care dă o elegantă soluţie problemei lui *Traian Lalescu.* Mai amintim „Asupra numărului e" (GMB-1976), „Câteva probleme deosebite" (GMA-1999), „Cum apreciem unele soluţii" (GMA-1/2001). A mai publicat în revistele Astra din Sibiu şi Octogon (fostă Gamma), Arhimede, dar şi în Mat. Vesnik şi American Mathematical Monthly.

A fost preşedintele Filialei Sibiu a S.S.M.R. (1977-1991).

Diploma de excelenţă a S.S.M.R. i-a fost înmânată la Universitatea Lucian Blaga din Sibiu în cadrul unei activităţi festive.

Prof. univ. dr. MIRELA ŞTEFANESCU
Universitatea Ovidius din Constanţa

S-a născut pe 8 decembrie 1941, în com. Ghirdoveni, jud. Dâmboviţa.

Studiile preuniversitare le urmează la Câmpulung Muscel şi Câmpina. În clasele a IX-a şi a X-a participă la faza pe ţară a Olimpiadei de Matematică, ca reprezentantă a regiunii Ploieşti.

Este absolventă a Facultăţii de Matematică a Universităţii din Iaşi, promoţia 1964, cu diplomă de merit, ceea ce a făcut să fie reţinută în facultate, ca preparator. Devine, pe rând, asistent (1966-1968), lector (1968-1990) şi conferenţiar (1990-1993) la aceeaşi facultate. În 1985 beneficiază de o bursă la Universitatea din Tübingen. Din 1993 este profesor universitar la Universitatea Ovidius din Constanţa.

În 1977 îşi susţine teza de doctorat cu tema „Corespondenţe între structuri algebrice". A ţinut cursuri şi seminarii de Teoria grupurilor, Aritmetica şi teoria numerelor, Teoria categoriilor, Algebre universale, etc.

Din 1991 este conducător de doctorat, cu 10 doctori şi 6 doctoranzi.

Publică unsprezece cărţi: Teoria lui Galois, Ex Ponto, 2002, Introducere în teoria grupurilor, Algebre Jordan, 2001 ş.a. şi peste 50 de articole în reviste de prestigiu din ţară şi străinătate. Participă la peste 40 de conferinţe internaţionale.

Este membru în colectivele de redacţie ale revistelor „Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius" din Constanţa, Mathematical Reports, ROMAI Journal. Este organizator al unor importante conferinţe de algebră la Iaşi şi Constanţa.

A condus, începând cu 1970, peste 125 de lucrări pentru obţinerea gradului I în învăţământ pentru profesori din judeţele Moldovei şi Dobrogei. A îndeplinit funcţia de inspector şcolar general la Inspectoratul Şcolar Constanţa (1997-1999) şi de preşedinte al Consiliului Naţional pentru Aprobarea Manualelor (1999-2001).

Preşedintele *Emil Constantinescu* îi acordă medalia „Pentru Merit în grad de comandor" (dec. 2000).

Este membru al S.S.M.R. din 1964. A făcut parte din Comitetul Filialei Iaşi a Societăţii (preşedinte prof. univ. *Adolf Haimovici*), ocupându-se de organizarea cursurilor de vară pentru profesorii din învăţământul preuniversitar, la Piatra Neamţ (1997, 1998), precum şi din Consiliul Societăţii, iar, în mai multe rânduri, din Comisia de organizare a Olimpiadei Naţionale de Matematică.

Diploma de excelenţă a S.S.M.R. i-a fost acordată la Universitatea „Ovidius" din Constanţa, cu ocazia deschiderii Şcolii Naţionale de Algebră, septembrie 2006.

Prof. LAURA CONSTANTINESCU
Liceul Teoretic Octavian Goga din Sibiu

S-a născut la 1 martie 1935, la Sibiu, părinţii fiind profesori în acelaşi oraş. A urmat şcoala primară pe lângă Şcoala Normală de fete, trei clase gimnaziale la Liceul Domniţa Ileana, iar liceul la Şcoala Medie nr. 3 (actualul Liceu teoretic Octavian Goga) din Sibiu.

Pasiunea pentru matematică i-a fost insuflată în liceu de către profesoara de excepţie care a fost *Maria Vasu*. Ca urmare, între 1952-1957, urmează cursurile Facultăţii de Matematică-Fizică, secţia matematică a Universităţii din Bucureşti. Aici are ca profesori pe toţi marii matematicieni ai timpului *Cabiria Andreian-Cazacu*, *Dan Barbilian*, *Alexandru Froda*, *Aristide Halanay*, *Constantin Ionescu-Tulcea*, *Mihai Neculce*, *Octav Onicescu*, *Miron Nicolescu*, *Grigore Mosil*, *Caius Iacob*, *Nicolae Teodorescu*, *Victor Vâlcovici*, *Gheorghe Vrănceanu*. Examenul de stat îl susţine la acad. *Nicolae Teodorescu* cu lucrarea „Metode funcţionale în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip eliptic", apreciată cu calificativul „foarte bine".

După absolvire, funcţionează ca dascăl, la Sibiu, la liceul pe care l-a urmat, de unde se pensionează în anul 1990. Pentru scurt timp funcţionează şi ca asistent la catedra de matematică la Şcoala Militară Superioară de Ofiţeri Nicolae Bălcescu din Sibiu.

Obţine gradul I în învăţământ în anul 1973, preşedinte de comisie fiind acad. Gheorghe Mihoc.

Are o preocupare constantă în pregătirea elevilor cu aptitudini deosebite pentru matematică; astfel elevii *Radu Magda*, *Dumitru Zăgan*, *Petru Stângescu* vor face parte din laureaţii olimpiadelor naţionale, iar elevul *Ilie Bârză* este cooptat în lotul pentru „internaţională". Alături de alţi distinşi profesori de matematică din liceu (*Ilie Stănescu*, *Harald Müller*, *Oliver Konnerth*, ca să dăm numai câteva exemple) a făcut ca această unitate şcolară să fie menţionată cu rezultate deosebite în activitatea cercurilor de elevi, iar rubrica rezolvitorilor din Gazeta Matematică în care se nominalizează elevi sibieni să fie constant substanţială.

A prezentat la cercurile pedagogice, la activităţile S.S.M.R. sau la consfături naţionale materiale legate de teme noi care urmau să fie introduse în programele şcolare (Noţiuni de teoria grupurilor, 1958, Transformări geometrice, 1962, Bazele programării linaire, 1963, Elemente de teoria probabilităţilor, 1964, Structuri algebrice, elemente de logică matematică, 1966, Câteva noţiuni de lingvistică matematică, 1968, Calculatorul şi prelucrarea datelor, 1971). Tot în acelaşi cadru a prezentat şi multe materiale de metodică (observaţii asupra proiectelor de programă de matematică în liceu, 1963, Asupra manualului de geometrie, 1966, Rolul contraexemplelor în predarea matematicii, 1978).

A făcut parte din comisiile pentru obţinerea gradelor didactice şi a olimpiadelor naţionale de matematică (Bucureşti, Constanţa, Galaţi).

Este autor (în colaborare) a manualului de geometrie pentru clasa a IX-a, apărut în 1964 şi folosit, cu revizuiri, până în 1978.

De-a lungul anilor a colaborat cu probleme propuse la diferite publicaţii, în special la Gazeta Matematică, seria B, unde a publicat peste 200 de probleme. În anul centenarului acestei reviste este premiată pentru cea mai bună problemă propusă. Colaborarea cu Gazeta Matematică a continuat şi după pensionare, cu regretul că geometria plană, domeniu predilect, pierde din ce în ce mai mult teren.

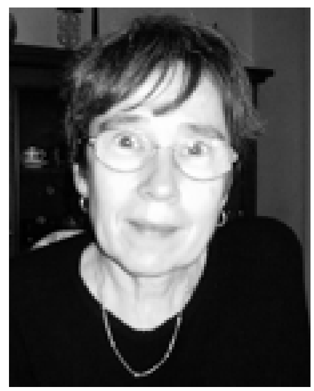
A primit, prin decret prezidenţial, titlul de Profesor Emerit, în 1974. A fost distinsă, de asemenea, cu Diploma de onoare a S.S.M.R., precum şi cu diplomele Liceului Octavian Goga, respectiv Inspectoratului Şcolar Sibiu (2001).

Diploma de excelenţă a S.S.M.R. i-a fost înmânată în cadrul unei acţiuni a Filialei Sibiu a Societăţii.

Profesor LILIANA NICULESCU
Colegiul Naţional Carol I din Craiova

S-a născut la 29 ianuarie 1947 la Sibiu, oraşul în care urmează toate cursurile preuniversitare. Este absolventă a Facultăţii de Matematică-Mecanică, Universitatea din Bucureşti, promoţia 1970. Funcţionează ca profesor de matematică, la început la Liceul Pedagogic din Bucureşti, apoi, cea mai mare parte a timpului, la Colegiul Carol I din Craiova, de unde se pensionează în anul 2004.

Ca elevă a Şcolii medii nr. 3 din Sibiu (actualul Liceu Teoretic Octavian Goga) este menţionată în Gazeta Matematică în anul 1964 ca având o activitate deosebită la rubrica rezolvitorilor. Un an mai târziu, îi apare în revistă prima problemă propusă. Anul 1965 se pare că îi este favorabil: este cooptată în urma barajelor succesive în lotul lărgit şi apoi în echipa României, care participa cu 8 elevi la cea de-a VII-a Olimpiadă Internaţională de Matematică de la Berlin (devine prima elevă selectată în lotul pentru „internaţionale", performanţă care va fi reeditată peste mulţi ani de eleva *Ana Caraiani*). Rezultatul la Berlin este pe măsura aşteptărilor: o medalie de argint (din cele patru ale României, care ocupă un merituos loc trei, după U.R.S.S. şi Ungaria), totodată realizând cel mai bun punctaj din lotul românesc şi cel mai mare punctaj dintre toate elevele participante! A fost desemnată să rostească, din partea elevilor, cuvântul de închidere la olimpiadă.



Pasiunea pentru activitatea matematică de perfomanţă a rămas o constantă în preocupările de mai târziu ale doamnei profesoare. Se poate mândri, în acest sens, cu elevul *Mugurel A. Barcău* (medalie de aur la Balcaniada de la Sofia, 1985, medalie de argint, respectiv de aur, la Olimpiadele Internaţionale de la Helsinki, 1985 şi Havana, 1987), dar şi cu încă 13 premianţi la fazele finale ale concursului de matematică care, în prezent, sunt doctori sau doctoranzi în matematică. În ultimii cinci ani are şapte premianţi la faza naţională a concursului de matematică şi doi premianţi la Concursul Naţional de Matematică din Bulgaria. A făcut parte din Comisia centrală a olimpiadelor naţionale de matematică de la Râmnicu Vâlcea, Arad, Botoşani, Constanţa, Sibiu, Bistriţa; a însoţit echipa României la Balcaniadele de matematică din Cipru (1980) şi Iugoslavia (1989), a făcut parte din comisiile de coordonare a Balcaniadei de la Constanţa (1991) şi a Balcaniadei de juniori de la Târgu Mureş (2002).

Este autor sau coautor la 3 manuale şi 16 culegeri de probleme destinate elevilor din învăţământul preuniversitar şi peste 10 note şi articole publicate în revistele Gazeta Matematică, Cardinal, Ţiţeica, unde face parte şi din colegiile redacţionale. De asemenea a făcut parte din Comisia de evaluare a manualelor şcolare (2001).

În prestigiosul Colegiu Naţional Carol I din Craiova a participat la pregătirea elevilor în cadrul grupelor de excelenţă, a contribuit la organizarea celor şase ediţii ale Concursului de matematică „Ion Ciolac", 2001-2006, iar prin Programul Socrates, a participat la programele Fundaţiei „N. Vasilescu-Karpen".

A primit titlul de profesor evidenţiat în anii 1982, 1983.

Este membru al S.S.M.R. din anul 1970.

Diploma de excelenţă a S.S.M.R.i-a fost acordată în ambientul deosebit al Casei Universitarilor din Craiova, în cadrul unei activităţi organizate de Filiala Craiova a Societăţii.

Prof. GHEORGHE SZÖLLÖSY
Colegiul Naţional Dragoş Vodă din Sighetu Marmaţiei

S-a născut la 17 septembrie 1939, în Oradea. A absolvit Liceul I. Rangheţ (în prezent liceul Farcaş Bolyai) din Târgu Mureş în anul 1954, apoi Universitatea din Cluj, în anul 1958. În continuare funcţionează ca profesor de matematică la mai multe unităţi de învăţământ din Sighetu Marmaţiei, pensionându-se în anul 1998 de la Colegiul Naţional Dragoş Vodă din localitate.

În cei 40 de activitate didactică a pregătit sute de absolvenţi care sunt în prezent profesori, economişti, ingineri. Printre aceştia, un loc deosebit îl ocupă *Bogdan* şi *Orest Bucichovski*, primul, câştigător al Olimpiadei Naţionale, clasa a X-a (1979), cel de-al doilea, medaliat cu argint la olimpiadele internaţionale de matematică de la Washington (1981), Budapesta (1982) şi Paris (1983).

O activitate cu adevărat remarcabilă a domnului profesor este aceea de propunător de probleme. A început să publice probleme din anul 1964, în Gazeta Matematică, Revista Matematică din Timişoara (în limba română), Matlap (în limba maghiară) şi Octogon (în limba engleză). Recent, după o muncă susţinută, a reuşit sistematizarea pe teme a problemelor (peste 4500, dintre care 1300 publicate), în vederea realizării unui volum aflat deja în atenţia unei edituri. Să menţionăm că mai mult de jumătate dintre problemele propuse au fost „născocite“ după pensionare...

Este membru al filialei Maramureş a S.S.M.R., încă de la înfiinţare.

Este un reputat jucător de tenis de masă (a fost finalist la campionatul republican din 1959) şi de şah (finalist la campionatul republican pe echipe), dar şi un cunoscut jucător de bridge (campion al Transilvaniei în 1975 la perechi, obţinând şi două medalii de bronz la campionatul naţional pe echipe).

Diploma de excelenţă a S.S.M.R. i-a fost înmânată în cadrul unei şedinţe festive a filialei Maramureş a Societăţii, organizată cu această ocazie.

Mircea Trifu

REVISTA REVISTELOR

R. M. M. – revista de matematică mehedinţeană

Domnul profesor Gheorghe Căiniceanu din Turnu Severin – redactorul şef al publicaţiei – ne-a expediat ultimul număr apărut al revistei, anume nr. 6 din decembrie 2006.

Revista dedică un mare număr de pagini Concursului interjudeţean „Petre Sergescu“, prezentând programul simpoziomului naţional organizat cu această ocazie (39 de comunicări), subiectele de concurs (clasle IV-XII), lista completă de laureaţi ai concursului, precum şi o selecţie de referate prezentate cu această ocazie. De asemenea, în acest număr se inaugurează şi o rubrică nouă destinată prezentării unor scurte biografii ale elevilor mehedinţeni care s-au realizat profesional cu ajutorul matematicii, fie în ţară, fie pe alte meleaguri. Ni se pare benefică şi interesantă această iniţiativă , care ar fi bine să fie preluată şi de alte publicaţii locale, deoarece realizare – pe plan profesional – a unor membrii ai comunităţii locale poate constitui un real îndemn pentru elevi să se dedice studiului matematicii.

În fine, trebuie să menţionăm numeroasele materiale grupate sub genericul „Cercul de matematică“, precum şi iarăşi – ca un fapt pozitiv şi cu caracter emulator – publicarea unor liste complete a tuturor laureaţilor din judeţ ai diverselor concursuri locale şi naţionale.

Oricum, R. M. M. sparge tiparele obişnuite în care sunt concepute publicaţiile locale de profil (şi care calchiază, în genere, Gazeta Matematică) dovedindu-se, în continuare, o apariţie proaspătă şi interesantă. Să fie aceasta explicabil şi prin caracterul prea puţin mercantil (reflectat şi printr-o listă redusă de rezolvitori) impus publicaţiei de Colegiul Redacţional?

Dan Radu

Sinus – revistă de matematică pentru învăţământul preuniversitar

Prin bunăvoinţa domnului dr. ing. *D. Băiţan*, ne-au parvenit la redacţie primele şase numere (anii 2005 şi 2006) ale revistei editate de Societatea ştiinţifică „Cyganus" de pe lângă Centrul UNESCO din Suceava. Vom aminti că revista îl are ca director pe prof. *V. Monacu*.

Editată în condiţii grafice deosebite, publicaţia suceveană se adresează elevilor de gimnaziu şi de liceu, „oferind acestora şi profesorilor lor un mijloc de a comunica prin limbajul complex şi atât de fascinant al matematicii" (prof. *V. Şutac* în „La început de drum").

Ca un element pozitiv trebuie să menţionăm faptul că fiecare număr conţine 5-6 note matematice, păstrându-se, astfel, un bun echilibru între materialele teoretice publicate şi problemele propuse elevilor spre rezolvare. Vom menţiona câte un titlu din fiecare cele şase numere ce ne-au fost puse la dispoziţie, subliniind faptul că selecţia este destul de aleatorie şi subiectivă: „Generalizări ale formulei a doua de medie pentru integrala definită" (*I. Bursuc*), „Metoda reducerii la absurd" (*D. Isopescu*, *L. Lupăşteanu*), „Asupra unor recurenţe de tip funcţie" (*A. Ţigăeru*, *M. David*), „Precizări la unele relaţii de evaluare în triunghi" (*D. Băiţan*), „Structura grupurilor matriciale abeliene de ordin finit" (*C. Ţigăeru*), „Demonstraţii ale unei inegalităţi geometrice în triunghi (*D. Băiţan*).

Dan Radu

Creaţii matematice

La Suceava a fost lansată o nouă publicaţie matematică intitulată „Creaţii matematice", concepută să apară în două serii: seria A (cu două apariţii anuale), şi seria B (cu patru apariţii anuale), ambele sub direcţia profesorului *Ion Bursuc* din localitate. Menţionăm că la redacţie ne-au parvenit numerele 1 şi 2 din seria A (2006) şi numărul 1 din seria B (2006).

De la bun început trebuie să ne manifestăm nedumerirea în ce constă diferenţa dintre cele două serii, întrucât ambele sunt subintitulate „Revistă de cultură matematică pentru învăţământul preuniversitar", beneficiază de aceeaşi prezentare grafică şi – în principiu – abordează cam aceeaşi problematică. Mai mult, în prezentarea la lansare a ambelor serii – făcută de prof. univ. univ. dr. *Dorel I. Duca*, membru de onoare al ambelor comitete de redacţie – nu am sesizat nici o deosebire în ceea ce priveşte sfera de preocupări a celor două serii şi nici relativ la categoriile de cititori (diferenţiate) cărora li s-ar adresa. Vom mai observa şi faptul că de nicăieri nu rezultă cine editează aceste reviste, ceea ce ne face să credem că ele sunt rodul unei iniţiative pur particulare. Poate, în viitor, redacţia ne va lămuri aceste nedumeriri.

În ceea ce priveşte conţinutul, acesta se înscrie în linia generală a revistelor locale destinate învăţământului preuniversitar, publicând o serie de articole şi note matematice, probleme de examen şi concurs, precum şi probleme propuse şi rezolvate pentru ciclurile gimnazial şi liceal. Un fapt pozitiv ce trebuie menţionat este numărul mai mare decât se obişnuieşte de note matematice şi articole inserate în coloanele revistei.

Dan Radu

Creative Mathematics and Informatics

La Baia Mare a văzut lumina tiparului volumul 15 (2006) al Lucrărilor Seminarului de Creativitate Matematică, editat de Departamentul de Matematică şi Informatică al Universităţii de Nord din localitate.

Fiind o revistă cu caracter ştiinţific, nu vom face comentarii asupra conţinutului ei, mulţumindu-ne doar să cităm titlurile câtorva articole care ni s-au părut mai interesante: „New refinaments for the AM-GM-HM inequalities" (*M. Bencze*), „Geometric prequatization of the dual of Lie algebra SO (6)" (*M. Ivan*), „From non-Euclidean geometries o Picasso, Stravinski ..." (*D. Papuc*) etc.

Dan Radu

Revista de Matematică din Timişoara

Domnul profesor *Ion Damian Bârchi*, directorul publicaţiei, ne-a trimis ultimul număr tipărit al acesteia: nr. 4/2006 (anul XI – seria a IV-a).

Din punctul de vedere al calităţii problemelor propuse elevilor spre rezolvare, revista îşi menţine standardul ridicat, bucurându-se de o largă audienţă printe aceştia şi profesorii lor, fapt dovedit de aria geografică largă de răspândire probată de lunga listă a rezolvitorilor de probleme.

Cele două note matematice inserate în acest număr sunt: „Asupra inegalităţii lui Gerretsen" (C. Lupu) şi „Inegalitatea lui Fagnano" (*M. Miculiţa*).

Dan Radu

Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin

Ultimul număr al revistei editate de filiala Caraş Severin a S.S.M.R care a sosit la redacţie este numărul 18 (an VII-2006).

Revista îşi păstrează structura şi formatul numerelor prezentate anterior, menţinându-şi nivelul din punctul de vedere al accesibilităţii şi al volumului de informaţie prezentat cititorilor.

Iată titlurile câtorva scurte note inserate în prezentul număr: „Câteva relaţii metrice în patrulatere şi tetraedre" (*N. Stăniloiu*), „Asupra unei probleme a lui D. V. Ionescu" (*D. Bătineţu-Giurgiu*), „Despre asimptotele unei funcţii spre $+\infty$ şi $-\infty$" (*N. Petrişor*), „O demonstraţie inductiv analitică a inegalităţii mediilor" (*D. Mărghidanu*). Vom face precizarea că această ultimă notă reprezintă un caz particular, accesibil elevilor, al unei probleme generale, abordate de autor în articolul acestuia publicat de noi în prezentul număr al revistei.

În fine, vom mai menţiona şi proiectul de curs opţional, semnat de profesorul *Lucian Dragomir* – principalul animator al revistei –, care continuă, după cum se pare, tradiţia unor astfel de proiecte ce reprezintă – credem – un real sprijin în activitatea didactică a profesorilor de matematică.

Dan Radu

Revista de matematică din Valea Jiului

Revista de matematică din Petroşani nu mai este, de acum, o cunoştinţă nouă pentru cititorii noşti. Iată că am primit şi numărul 3, din septembrie 2006.

Din sumarul acestui număr vom cita: „O altă extindere a unor inegalităţi geometrice" (*M. Stoica*, *Gh. Stoica*), „O consecinţă a concavităţii funcţiei sin pe $(0,\pi)$" (*D. Şt. Marinescu*, *V. Cornea*), „Şiruri α-derivabile" (*Gh. Stoica*), „Câteva exemple de şiruri derivabile" (*D. M. Bătineţu-Giurgiu*).

De asemenea, vom aminti interesanta şi amuzanta rubrică „Divertisment matematic".

Dan Radu

Axioma – supliment matematic

Redactorul coordonator *Gheorghe Crăciun* ne-a trimis ultimul număr apărut al publicaţiei prahovene – nr. 19 (anul VI-2006).

Revista se menţine în linia – şi cu structura – pe care şi cu alte ocazii am prezentat-o. Din cuprinsul ei vom menţiona materialul „Realitatea (modulo Moisil)" semnat de prof. univ. dr. *Miron Oprea* şi care comemorează 100 de ani de la naşterea regretatului matematician român. Tot domnia sa semnează (pe coperta 4) şi o scurtă tabletă comemorativă dedicată centenarului naşterii acad. *Tiberiu Popoviciu*.

Vom mai remarca faptul că publicaţia conţine nu mai puţin de 15 pagini de rezolvitori. Oare de ce reţea de distribuţie beneficiază? Poate asupra acestei probleme vom mai reveni şi cu altă ocazie.

Dan Radu

Revista de informare matematică

Revista braşoveană editată de S.C. GREEN ECO S.R.L. a ajuns la numărul 12 (anul VI-2006).

Ea continuă să fie, de fapt, o culegere de probleme, cu apariţie periodică, utilă – probabil– profesorilor şi elevilor în activitatea de clasă, lucru ce explică şi volumul destul de mare de rezolvitori inseraţi la fiecare număr. Materialele teoretice cu caracter informativ sunt destul de „subţiri" şi nu foarte consistente. Singurul material mai interesant, publicat în cadrul rubricii „Istoria Matematicii", aparţine profesorilor *Alexandru* şi *Tinca Pavel* din Mangalia şi este intitulat „Impresii de călătorie – Insula Samos". În rest – nimic nou faţă de numerele precedente.

Dan Radu

Revista de matematică şi informatică

Domnul Profesor *Alexandru Pavel* din Mangalia ne-a expediat ultimul număr apărut (nr. 3-4, anul VI-2006) al revistei constănţene.

Ca de obicei, revista contine numeroase şi variate tipuri de probleme, propuse şi rezolvate, de la ciclul primar şi până la ultimii ani de liceu. Desigur sunt inserate şi câteva probleme de informatică, care dau revistei o notă aparte.

Singura notă matematică publicată – intitulată „C.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c" este semnată de prof. univ. dr. *I. Cucurezeanu* unul din cei doi coordonatori ai revistei. Celălalt coordonator al publicaţiei – prof. *I. Tiotioi* – publică, în acest număr, o scurtă dare de seamă despre tabăra de matematică a rezolvitorilor din R. M. I. C. desfăşurată la Sinaia în luna august 2006.

Dan Radu

RECENZII

LAURENŢIU PANAITOPOL, ALEXANDRU GICA, Probleme de aritmetică şi teoria numerelor. Idei şi metode de rezolvare, Editura GIL, Zalău, 2006

Volumul celor doi distinşi autori reprezintă cea de a 10-a carte inserată de Editura GIL în cadrul seriei „Biblioteca Olimpiadelor de Matematică". De la bun început trebuie să spunem că ea depăşeşte cu mult scopul propus, constituindu-se într-un veritabil regal de aritmetică şi teoria numerelor, interesând pe orice producător şi consumator de matematică. Nu trebuie să uităm că primul dinte autori este unul dintre matematicienii actuali români de marcă, care, de-a lungul unei vieţi întregi, s-a aplecat cu dragoste şi pasiune asupra problematicii matematice – cu precădere legate de aritmetică şi teoria numerelor şi care a fost şi unul dintre principalii animatori ai Gazetei Matematice şi ai concursurilor şcolare. În acest context, nu este de mirare că autorii au ales drept motto al volumului un mare adevăr rostit, cândva de *Paul Halmos*: „Problemele sunt inima matematicii".

Prezentul volum se doreşte o continuare a două mai vechi cărţi pulicate de autori în Editura Universităţii din Bucureşti şi anume: „Probleme celebre de teoria numerelor" (1998) şi „O introducere în Aritmetică şi Teoria numerelor" (2001) – modest menţionte de autori în text, sub denumirea de „Curs".

Lucrarea este împărţită în 17 capitole – pe care, din cauza lipsei de spaţiu, nu le vom enumera – , acoperind întreaga arie a domeniului abordat. Fiecare capitol debutează cu indicarea câtorva rezultate teoretice, menite a-l ajuta pe cititor în rezolvarea problemelor. De asemenea, sunt expuse şi câteva probleme complet rezolvate, „pentru a sugera mai bine ideile şi metodele de rezolvare din acel capitol".

Problemele sunt ierarhizate după gradul de dificultate, ultimele fiind, îndeobşte, extrem de dificile şi constituind o invitaţie către cercetare şi reflexie. Fără a părăsi cadrul „elementar" (ca aparat matematic utilizat), ele îndrumă cititorul către capitole ale teoriei numerelor ce aparţin matematicii superioare, actuale în esenţă şi perpetuu generatoare de idei şi metode noi în matematica modernă.

Foarte multe dintre problemele incluse în culegere sunt originale (chiar dacă acest lucru este specificat cu parcimonie), pentru cele clasice sau ale căror autori sunt cunoscuţi făcându-se cuvenitele menţiuni.

Considerăm că această superbă carte, considerată de autori ca adresându-se „tuturor celor pasionaţi de teoria numerelor", nu trebuie să lipsească din biblioteca nu numai a oricărui elev sau profesor pasionat de matematică, ci a oricărui matematician (profesionist) care se respectă pe sine şi pentru care matematica constituie un autentic mod de viaţă.

Dan Radu

ARTHUR ENGEL, Probleme de matematică, strategii de rezolvare,
Traducere de Mihai Bălună,
Editura GIL, Zalău, 2006

Cartea de faţă este rezultatul lecţiilor de pregătire ale echipei germane pentru concursurile de matematică la cel mai înalt nivel. Sunt sintetizate aici principalele teme prezente la O.I.M.

Iată lista capitolelor ce constituie conţinutul prezentei lucrări: 1. Principiul invarianţilor; 2. Demonstraţii prin colorare; 3. Principiul extremal; 4. Principiul cutiei; 5. Combinatorică enumerativă; 6. Teoria numerelor; 7. Inegalităţi; 8. Principiul inducţiei; 9. Şiruri; 10. Polinoame; 11. Ecuaţii funcţionale; 12. Geometrie; 13. Jocuri; 14. Alte strategii.

Fiecare capitol debutează cu exemple ce pun în evidenţă ideile principale şi continuă cu probleme (însoţite mai adesea de soluţii complete, sau, mai rar, de indicaţii). Lucrarea cuprinde peste 1300 de exemple şi probleme. Deoarece cartea conţine probleme pentru orice nivel (de la cele mai simple, până la cele mai dificile propuse vreodată la o competiţie), ea se adresează, în egală măsură, atât antrenorilor şi participanţilor la concursurile matematice, cât şi profesorilor de liceu care conduc cercuri de matematică sau care doresc să-şi îmbogăţească lecţiile cu probleme interesante.

Având în vedere faptul că, atât autorul, cât şi traducătorul acestei cărţi sunt nume de referinţă în domeniul concursurilor şcolare la cel mai înalt nivel, considerăm că Editura GIL oferă un excelent instrument tuturor celor pasionaţi de concursurile de matematică.

Radu Miculescu

DAN BĂRBOSU, Polynomial Approximation by Means of Schurer-Stancu
type operators, Editura UNIVERSITĂŢII DE NORD, Baia Mare, 2006

O nouă şi remarcabilă carte vine să se adauge în mod meritoriu monografiilor de Teoria aproximării din literatura matematică românească elaborate în cadrul Şcolii clujene de Analiză numerică şi Teoria aproximării, fondate de *Tiberiu Popoviciu* şi *D. V. Ionescu* şi condusă astăzi de acad. *D. D. Stancu*.

Printre cărţile de Teoria aproximării din ultimii circa zece ani, scrise de reprezentanţi ai acestei şcoli se pot cita mai multe monografii; avem în vedere, în primul rând, tratatul în trei volume scris de către acad. *D. D. Stancu* şi un prestigios colectiv format din *Gh. Coman*, *P. Blaga*, *O. Agratini*, *R. Trâmbiţaş* şi *I. Chiorean*, iar apoi monografiile având ca autori pe *Gh. Coman*, *L. Lupaş*, *O. Agratini*, *I. Gavrea* şi *V. Miheşan* (două monografii), *D. Bărbosu* (vorbind aici de altă monografie!), *D. Simian* şi semnatarul acestor rânduri.

În prezenta monografie autorul defineşte un nou operator de aproximare care generalizează atât operatorul introdus de către matematicianul olandez *Frans Schurer* în 1962, cât şi pe cel introdus de către acad. *Dimitrie D. Stancu* în 1968. Nu vom prezenta aici toate formulele corespunzătoare, menţionând doar că noul operator reprezintă o combinaţie inspirată între cei doi operatori. În noua definiţie, dată de către autorul *Dan Bărbosu*, sunt considerate valorile polinoamelor fundamentale ale lui *F. Schurer*:

$$\widetilde{p}_{m,k} = \binom{m+p}{k} x^k (1-x)^{m+p-k}$$

în nodurile introduse de acad. *D. D. Stancu*, $\dfrac{k+\alpha}{m+\beta}$, $(0 \le \alpha \le \beta)$. Din această cauză operatorul a fost numit *Schurer-Stancu*.

În monografie sunt tratate în detaliu proprietăţile noului operator. Lucrarea conţine şapte capitole (pe care le redăm aşa cum apar în limba engleză):

1. Basic results;
2. *Schurer-Stancu* type operators;
3. On the monotonicity of the sequence of *Schurer-Stancu* polynomials;
4. The *Schurer-Stancu* approximation formula;
5. Simultaneous approximation by *Schurer-Stancu* type operators;
6. *Kantovich-Schurer-Stancu* type operators;
7. *Durrmeyer* type operators.

În final este prezentat un index de autori şi un index de subiecte. Cartea are 139 de pagini.

Prin modul clar în care este scrisă, prin explicaţiile date, prin detalierea calculelor, cartea se citeşte cu plăcere şi fără dificultate. Documentarea bibliografică, inclusiv comentariile bibliografice completează pe de-a întregul materia expusă. Prin contribuţia originală, prin ancorarea sa în domeniu, deja clasic, precum şi prin toate calităţile menţionate, cartea se recomandă de la sine. O consemnăm ca pe o nouă şi valoroasă lucrare în domeniul Teoriei aproximării.

Andrei Vernescu

GHEORGHE ANDREI, Exponenţiale şi logaritmi, Editura GIL, Zalău, 2006

Reputatul profesor *Gheorghe Andrei* din Constanţa şi-a făcut un obicei din a aborda în câte un volum independent diverse capitole, de obicei deficitare şi tratate cu superficialitate în culegerile de probleme şi în manuale. După volumele dedicate funcţiei parte întreagă şi radicalilor, iată acum o culegere dedicată altui capitol (tot un fel de „oaie neagră“ în publicistica noastră matematică) şi anume funcţiile exponenţiale şi logaritmice.

Despre calităţile selecţiei operate nu este cazul să discutăm, deoarece însuşi faptul că prestigioasa editură GIL din Zalău, a considerat oportună includerea ei în colecţia „Biblioteca Olimpiadelor de Matematică“ spune totul. Experienţa de o viaţă a autorului îşi spune cuvântul, lucrarea constituindu-se ca o micromonografie a subiectului.

Iată care sunt capitolele lucrării: 1. Proprietăţi; 2. Relaţii şi egalităţi; 3. Inegalităţi exponenţiale şi logaritmice; 4. Funcţii exponenţiale şi logaritmice; 5. Ecuaţii exponenţiale; 6. Ecuaţii logaritmice; 7. Inecuaţii exponenţiale şi logaritmice; 8. Sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice.

Problemele sunt însoţite de soluţii complete, iar autorul menţionează – cu scrupulozitate – cui i se datorează fiecare problemă, atunci când are informaţiile bibliografice.

Vom mai menţiona că prefaţa volumului este semnată de prof. univ. dr. *Ion D. Ion*.

Lucrarea este extrem de utilă, atât elevilor, cât şi profesorilor de liceu, acoperind – după cum spuneam – o tematică tratată, de obicei, cu superficialitate în publicistica matematică preuniversitară.

Dan Radu

VASILE CÎRTOAJE, Algebraic inequalities, Old and New Methods, Editura GIL, Zalău, 2006

Această nouă lucrare completează în mod fericit lunga listă de lucrări având drept subiect inegalităţile. Autorul este binecunoscut comunităţii matematice, având o bogată activitate publicistică în paginile multor reviste matematice consacrate.

Cartea, care cuprinde 480 de pagini, este redactată în limba engleză. Suntem convinşi că acest fapt face ca cercul celor care vor beneficia de conţinutul ei să se întindă şi în afara graniţelor ţării noastre.

Lucrarea este compusă din 8 capitole, anume:

1. Warm-up problem set
2. Starting from some special fourth degree inequalities
3. Inequalities with right convex and left concave functions
4. On *Popoviciu*'s inequality
5. Inequalities involving EV - Theorem
6. Arithmetic / Geometric Compensation Method
7. Symmetric inequalities with three variables involving fractions
8. Final problem set

şi se încheie cu o scurtă listă bibliografică, o listă de simboluri şi un util glosar în care sunt enunţate cele mai des utilizate inegalităţi. Conţinutul acestei cărţi, precum şi condiţiile editoriale deosebite, ne îndeamnă să credem că ea nu poate lipsi din biblioteca nici unui elev pasionat de matematică, şi, cu atât mai puţin, din biblioteca unui profesor de matematică.

Radu Miculescu

CONSTANTIN IONESCU-ŢIU, MIHAIL POPESCU, Probleme alese de matematică pentru liceu (ediţia a II-a), Editura TEHNICĂ, Bucureşti, 2003

În colecţia Universitaria a Editurii TEHNICE a văzut lumina tiparului ediţia a II-a a unei cărţi prestigioase. Prima ediţie, din 1992, s-a epuizat repede. Profesorul *C. Ionescu-Ţiu*, cel care a slujit cu credinţă Gazeta Matematică timp de jumătate de secol – şi care are o contribuţie hotărâtoare la această lucrare – ne-a părăsit în timp ce ea se afla sub tipar. A plecat dintre noi şi acad. *Caius Iacob*, cel care a scris *Cuvânt înainte*.

Memoriei lor luminoase le este dedicată această nouă ediţie de către al doilea autor, prof. univ. dr. ing. *Mihail Popescu*, nume cunoscut de către cititorii (de ieri) ai Gazetei Matematice. Domnia sa a mai adăugat 550 de probleme la cele existente, ridicând numărul lor la 1900, iar al paginilor, la 950!

Prin structura ei, monumentala lucrare acoperă întreaga programă a liceului, fiind împărţită în 9 capitole: 1. Geometrie plană (430 probleme); 2. Geometrie în spaţiu (125 probleme); 3. Trigonometrie (210 probleme); 4. Algebră elementară (330 probleme); 5. Algebră (180 probleme); 6. Geometrie analitică (90 probleme); 7. Elemente de analiză matematică (255 probleme); 8. Elemente de probabilităţi (50 probleme); 9. Probleme generale de sinteză (235 probleme).

Bibliografia este deosebit de bogată, cuprinzând 186 de titluri, la care se adaugă principalele reviste de matematică tipărite în România, începând cu Gazeta Matematică.

Multe dintre probleme sunt originale, altele sunt datorate unor matematicieni cunoscuţi. Sunt incluse şi subiectele propuse la diferite examene şi concursuri, incluzând şi olimpiadele naţionale şi internaţionale.

Selecţia problemelor a fost riguroasă, dând consistenţă şi farmec lucrării. Se publică, iată, o problemă dată la un concurs din 1973 cu o soluţie a lui *Gh. Mihoc*, o problemă a lui *N. N. Mihăileanu* din 1955, cu o soluţie a elevului (de atunci) *Radu Miron*, o problemă a lui *M. Vasiliu* din 1921 cu o soluţie a lui *Traian Lalescu*. Exemplele pot continua cu probleme ale autorilor din „prima generaţie", *N. Abramescu*, *D. Barbilian*, *Gh. Buicliu*, *A. Ioachimescu*, *Gr. Mosil*, *M. Nicolescu*, *V. Vâlcovici*, *S. Stoilow*, *O. Ţino*, *Gh. Ţiţeica*, dar şi a celor din generaţiile următoare: *D. Andrica*, *V. Brânzănescu*, *D. Brânzei*, *L. Constantinescu*, *I. Cuculescu*, *C. Năstăsescu*, *L. Panaitopol*, *Gh. Popescu*, *D. Radu*, *Gh. Szölösy*, *I. Tomescu*, *M. Ţena*.

Pentru unii cititori, chiar şi numai o simplă răsfoire a cărţii constituie o incursiune (sentimentală) în adolescenţă; pentru alţii, mai tineri, va fi, cu siguranţă, o necesară şi benefică întâlnire cu dificultatea provocatoare a problemelor de calitate, pentru că lucrarea este realizată, aşa cum observă acad. *Caius Iacob*, în cea mai pură tradiţie a Gazetei Matematice şi continuă opera *stâlpilor* acestei reviste, binecunoscuţii *Ion Ionescu*, *Andrei Ioachimescu*, *Vasile Cristescu* şi *Gh. Ţiteica*.

Cartea se constituie într-o valoroasă restituire culturală – matematica face parte din cultură, ne-a învăţat domnul profesor *Moisil* – făcută cu dragoste şi pricepere dinspre elevii de demult către elevii de azi, cărora li s-a dus vestea că nu mai vor să înveţe. Chiar aşa să fie?

Mircea Trifu

Concursul naţional de matematică „Laurenţiu Duican", Braşov, 1992-2004, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2005

Distinsul nostru colaborator, conf. univ. dr. *Eugen Păltănea*, ne trimite această lucrare al cărui coordonator este şi care este elaborată – în afară de domnia sa – de un colectiv format din prof. univ. *H. Banea*, prof. dr. *V. Drăghici*, prof. *I. Duican* şi prof. *R. Ilie*.

Lucrarea constituie de fapt o monografie a acestui concurs, iniţiat în 1992, la scurt timp după moartea prematură a lui *Laurenţiu Duican* (nu avea nici 19 ani), promiţător matematician şi literat.

La începutul ei, lucrarea este însoţită de alocuţiunea rostită atunci de academicianul *Nicolae Teodorescu*, preşedintele S. S. M. R. din acea perioadă.

Volumul reuneşte toate problemele propuse participanţilor – organizate cronologic –, precum şi soluţiile detaliate ale acestora. La fiecare ediţia a concursului este prezentată o repartiţie geografică a participanţilor, precum şi listele complete ale laureaţilor. De asemenea, sunt indicate comisiile centrale ale concursului, sunt reproduse diverse ecouri în presă ale acestora, precum şi alocuţiunile rostite de diverse oficialităţi cu aceste prilejuri. În ultima parte sunt facsimilate o serie de soluţii originale ale participanţilor la concurs şi sunt inserate o serie de ilustraţii (fotografii şi reproduceri) de la diversele ediţii ale acestuia.

Considerăm absolut notabilă această iniţiativă a autorilor şi ne-am bucura foarte mult dacă ar fi preluată şi de alte filiale din ţară care organizează – de-acum de mulţi ani – concursuri interjudeţene de largă audienţă şi veritabilă tradiţie (de exemplu, concursul interjudeţean „Gheorghe Ţiţeica").

Dan Radu

FLORIN DIAC, O istorie a învăţământului românesc, vol. I şi II, Editura OSCAR PRINT, Bucureşti, 2004

Distinsul profesor de matematică *Florin Diac*, fost inspector general al Inspectoratului Şcolar al Municipiului Bucureşti, creionează cu măiestrie şi competenţă dezvoltarea învăţământului românesc de la începuturi (sec. XVII) şi până în anul 1944 în primul volum, iar în volumul al doilea perioada 1944-1989.

Primul volum este dedicat începutului şi evoluţiei sistemului de învăţământ românesc. Se prezintă astfel, apariţia primei şcoli, precum şi factorii care au influenţat sistemul de învăţământ: ideile iluministe ale Revoluţiei Franceze (în Transilvania şi Principate), Regulamentul organic, revendicările – referitoare la învăţământ – ale Revoluţiei de la 1848 etc. Se studiază procesul de constituire şi perfecţionare a sistemului de învăţământ în epoca modernă. Se prezintă, de asemenea, etapizarea învăţământului românesc, începând cu Legea din 1864, a lui *Alexandru Ioan Cuza*, politica şi legislaţia şcolară în provinciile româneşti aflate sub dominaţie străină, pactul dualist austro-ungar, din 1867 şi consecinţele acestuia pentru învăţământul românesc din Transilvania, politica şi legislaţia şcolară a statului naţional român independent, personalitatea lui *Spiru Haret* în contextul evoluţiei şcolii româneşti. În continuare, autorul se referă la învăţământul pentru fete, la învăţământul particular de la finele secolului al XIX-lea, învăţământul artistic (muzical, teatral şi de arte plastice), cel militar, şi – în fine – învăţământul seminarial - teologic. De asemenea, este analizat conţinutul învăţământului: planurile de învăţământ, programe, manuale şcolare, metode, pregătirea personalului didactic, presa pedagogică, scriitorii români şi rolul lor în dezvoltarea şcolii româneşti.

În partea a doua a primului volum este prezentată evoluţia învăţământului românesc în perioada interbelică, începând cu situaţia economică şi politică a României după Marea Unire de la 1 decembrie 1918. Astfel sunt trecute în revistă legislaţia învăţământului românesc în perioada ce a urmat Marii Uniri de la 1918, Legea învăţământului secundar din 1928, schimbările în organizarea şi desfăşurarea învăţământului comercial şi industrial; de asemenea, se face o prezentare sumarăa învăţământului superior din perioada respectivă; mai departe, autorul studiază dezvoltarea învăţământului bucureştean până la reforma din 1948, în domeniul liceelor teoretice, comerciale, cât şi a altor unităţi de învăţământ înfiinţate în perioada 1900-1944. Sunt astfel evidenţiate o serie de fapte care au marcat învăţământul românesc din respectiva perioadă: inspecţia şcolară ca instituţie de control şi îndrumare, afirmarea pedagogiei moderne (şcoala pedagogică românească în procesul instructiv educativ) învăţământul românesc din Transilvania de nord în perioada ocupaţiei hortyste, situaţia unităţilor de învăţământ care funcţionau în Bucureşti la reforma învăţământului din august 1948 (multe desfiinţate ca urmare a reformei), înfiinţarea altora noi, precum şi reprofilarea altora mai vechi. În finalul primului volum sunt prezentate unele scheme interesante precum: sistemul de învăţământ din România în 1865 pe baza Legii instrucţiunii din 1864, sistemul de învăţământt din România anilor 1898-1900, reforma lui *Spiru Haret*, sistemul de învăţământ din România între anii 1918-1948.

Volumul al doilea începe cu capitolul „Învăţământul românesc după 23 august 1944, până la aplicarea reformei din 3 august 1948". Se tratează: şcoala românească între democraţie şi totalitarism, înfiinţarea Societăţii Culturale şi Pedagogice „Şcoala Nouă", programul pentru lichidarea analfabetismului, dezlănţuirea acţiunilor de reprimare a cadrelor didactice, a elevilor şi studenţilor de către dictatura comunistă.

Autorul, persoană care a trăit aceste evenimente, explică cu deosebit tact aceste stări de lucruri. Citez: „Sunt cunoscute cazurile de eliminare sau înlocuire a unor cadre didactice de mare prestigiu din facultăţile Universităţii Bucureştene, pentru simplul motiv că aveau o formaţie burgheză, incompatibilă cu educaţia comunistă, pe care trebuiau s-o facă studenţilor, cazurile cele mai frecvente au fost însoţite de arestarea şi întemniţarea multor profesori iluştri[1]).

Capitolul central al volumului este „Reforma învăţământului din 3 august 1948, măsuri şi consecinţe". Această reformă, ca şi consecinţele ei s-au datorat instaurării în Romania a dictaturii proletariatului şi organizării societăţii româneşti după modelul sovietic. Învăţământul era obligat să copieze sistemul sovietic de învăţământ. Astfel, în programele analitice pentru limba şi literatura română, atât la ciclul gimnazial clasele V-VII, cât şi la ciclul liceal, clasele VIII-X, din 1952-1953 se prevedea expres: Ultimele lecţii vor fi consacrate predării principiilor fundamentale ale învăţăturii lui I. V. Stalin asupra limbii...[2]) Cu aceste deziderate, Ministerul Învăţământului trece la traducerea de manuale sovietice destinate ciclurilor gimnazial şi liceal.

În continuare, autorul prezintă „Politehnizarea" învăţământului de cultură generală, afectarea caracterului unitar şi independent al acestuia. Se trec în revistă noile planuri de învăţământ pentru şcolile de cultură generală de 7 ani şi pentru învăţământul seral şi fără frecvenţă. Autorul face observaţia că acum apare, pentru prima oară, sintagma „supraîncărcarea elevilor"; astfel Ministerul Învăţământului şi Cercetării, în instrucţiunile sale, interzicea organizarea în unităţile de învăţământ a unei pregătiri speciale (suplimentare) pentru elevii cu aptitudini speciale, în vederea participării acestora la concursurile şcolare de orice natură.

Sub ministeriatele lui *Ilie Murgulescu* şi apoi *Mircea Maliţa*, învăţământul preuniversitar se dezvoltă, apar liceele cu secţiile real şi uman, se elaborează un plan de învăţământ pentru şcoala de 8 ani (începând cu anul şcolar 1964-1965). Încă din 1959 se începe reorganizarea Societăţilor Ştiinţifice; în lucrare se exemplifică acest lucru cu înfiinţarea Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice, care avea în frunte personalităţi marcante ale matematicii româneşti ca: acad. *Grigore Moisil*, acad. *Nicolae Teodorescu*, acad. *Caius Iacob*, acad. *Gheorghe Mihoc* (preşedintele Filialei Bucureşti). În această perioadă se propune Ministerului Învăţământului iniţiativa înfiinţării Olimpiadei Internaţionale de Matematică. Trecerea la învăţământul obligatoriu de 8 ani, a făcut posibilă reapariţia liceului teoretic de 12 ani, reluându-se tradiţia liceului românesc iniţiată de *Spiru Haret*. Autorul prezintă planul de învăţământ ce a fost aplicat în anul şcolar 1968-1969 la clasele a IX-XII ale liceului teoretic. În perioada respectivă apare şi o destindere în presa pedagogică (de exemplu, dispar rubricile intitulate „Din experienţa şcolii sovietice", uneori înlocuite cu rubricile „Presa de peste hotare", în care se prezentau, pe larg, cuceririle pedagogice din R. F. Germania, India, Grecia, Franţa, Anglia etc.). Se reiau examenele pentru acordarea gradelor didactice (cu, evident, susţinerea unui examen de marxism-leninism, sub diverse forme ca socialism politic, economie politică socialistă etc.) În anul 1971, *Mircea Maliţa*, împreună cu acad. *Grigore Moisil*, au ridicat pentru prima dată, problema învăţământului informatic şi a celui dedicat tehnicilor de calcul. În acest context, s-au dezvoltat tehnicile de calcul în toate sectoarele de activitate, înzestrându-se liceele cu laboratoare de informatică. Se editează şi se difuzează literatură beletristică la un preţ accesibil, apar numeroase traduceri în limba română din literatura pedagogică mondială, precum şi literatura pedagogică autohtonă (strâns legată de cerinţele învăţământului), se înfiinţează biblioteca pedagogică naţională „I. C. Petrescu" la Bucureşti.

Această perioadă, în care „partidul clasei muncitoare şi ţărănimii" a condus România (până în decembrie 1989) este bine caracterizată în vol. II, pag. 303: „Trebuie să recunoaştem că, privită prin prisma învăţământului românesc de toate gradele, perioada totalitaristă a însemnat istorie, cu evenimente bune şi rele, care au afectat şcoala românească. Un lucru însă rămâne incontestabil: de-a lungul timpului, cine a vrut să înveţe carte a putut învăţa, exceptând pe fiii deţinuţilor politici, fiii de „chiaburi" şi de funcţionari ai statului dinainte de război care, deşi mulţi dintre ei înzestraţi pentru învăţătură, n-au avut acces la studii superioare, iar studiile liceale le-au fost greu accesibile. Alţii, cu siguranţă din motive politice nu au putut aspira la titlurile cele mai înalte, ...".

În încheiere, aş face observaţia că ar fi bine ca Ministerul Educaţiei şi Cercetării să recomande această carte instituţiilor de învăţământ din România, incluzând-o în bibliotecile şcolare, pentru ca toţi cei interesaţi să o poată consulta.

Grigore Bănescu

---

[1]) Vol. II, pag. 25, 26. (N.A.)

[2]) Vol. II, pag. 73. (N.A.)

EDUARD DĂNCILĂ, IOAN DĂNCILĂ Probleme alese pentru copii aleşi, clasele a IV-a, a V-a (O carte pentru zile ploioase), Editura AKADEMOS ART, Bucureşti, 2006

Subtitlul cărţii de-acum cunoscuţilor autori face să o deosebească de o alta, cu acelaşi titlu, dar care se adresează unor copii ceva mai mari.[1)]

Lucrarea, scrisă în cunoştinţă de cauză, este „... rezultatul dragostei faţă de micii şcolari şi a respectului faţă de învăţători", după cum mărturisesc, emoţionant, autorii. Cele peste 300 de probleme, atent selectate, au fost judicios repartizate pe 11 teme din aritmetica claselor a IV -a şi a V -a, unele inspirat „născocite" (Ex. „Probleme şi exerciţii pentru exclamat: Aha!"). De regulă, fiecăreia dintre ele îi sunt distribuite, în medie, un număr de 20 de probleme, cu excepţia titlurilor: „Operaţii cu numere naturale" şi „Probleme alese", cărora li se acordă o pondere mai mare (cca. 50, respectiv 100 de probleme).

Cartea constituie o sursă folositoare pentru învăţători şi profesori în activitatea la clasă sau în pregătirea concursurilor de matematică şi, cu acceptul scris al autorilor, orice parte a ei poate fi folosită în interesul copiilor, cu condiţia menţionării explicite a sursei.

O recomandăm cu căldură, înainte de toate, elevilor.

Mircea Trifu

POŞTA REDACŢIEI

Adrian Stroe – Liceul Teoretic Mihai Viteazul din Caracal. Am înlocuit articolul dumneavoastră mai vechi intitulat „Asupra unui şir celebru" prin varianta sa mai nouă cu titlul „Asupra unei mulţimi de şiruri". Procedura de avizare trebuie reluată.

Florin Smeureanu – Grupul Şcolar Oltchim din Râmnicu Vâlcea. Am reţinut comunicarea dumneavoastră prezentată la ultima sesiune de la Sinaia („Progresii aritmetice formate din numere prime") pentru a vedea în ce măsură este publicabilă în revista noastră.

Radu Vişinescu, **Violeta Vişinescu** – str. Rareş Vodă, nr. 28, Ploieşti. Lucrarea cu titlul „Consideraţii privitoare la teorema lui Lagrange" prezentată la Sesiunea de comunicări de la Sinaia a fost preluată de redacţia noastră pentru a studia posibilitatea publicării ei.

Gheorghe Szöllösy – str. Avram Iancu, nr. 28 E, Sighetu Marmaţiei. Problema propusă de dumneavoastră va fi inserată într-unul din numerele viitoare ale revistei.

Marian Tetiva – Colegiul Naţional Gheorghe Roşca Codreanu din Bârlad. Am primit cele trei problme propuse. Le vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

José Luis Díaz-Barrero – Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, Spain. We confirm the receipt of the problem you sent to us. It follows to be submitted to the attention of the Editorial Board.

Adrian Reisner – Centrul de calcul E. N. S. T., Paris. Redacţia a primit cele trei articole expediate de dumneavoastră: „Grup de matrici conţinut în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Aplicaţii: Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale $LX'+MX=0$, unde $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $L \notin GL_n(\mathbb{R})$", „Subalgebre nilpotente din $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$", „Matrici reale având partea simetrică pozitivă". Colegiul Redacţional va analiza oportunitatea publicării lor.

Nathaniel Hall, **Bogdan Suceavă**, **Kim Uyen Truong** – Departament of Mathematics, California State University, Fullerton, CA 92834 – 6850, U. S. A. Am primit articolul dumneavoastră intitulat „Angle Bisectors in a Triangle. A problem solving Approach". Îl vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Dan Radu

ERATĂ

1. În G.M.-A nr. **3**/2005, la pag. 203, în relaţiile 19, 20 şi 21 semnul „$\leq$" va fi înlocuit cu semnul „$\geq$".

Redacţia

1) Este vorba de cartea prof. *Armand Martinov*, cu acelaşi titlu, apărută la Editura NEMIRA şi care se adresează, cu precădere, elevilor de liceu. (N.A.)

A XI-a CONFERINŢĂ ANUALĂ A SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Conferinţă satelit a celui de al 6-lea Congres al Matematicienilor Români

Workshop on Mathematical Education

Bucureşti, 26-27 iunie 2007

Locul de desfăşurare: Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică, str. Academiei, nr. 14, Bucureşti

Limba de comunicare: română şi engleză

Condiţii de participare:

Doritorii vor trimite un Abstract al lucrării de cel mult o pagină, scris în limbajele Word sau Latex, până la data de **15 mai 2007**. Abstract-ul poate fi trimis prin poştă, pe adresa S.S.M.R. str. Academiei, nr. 14, sector 1, 010014 Bucureşti, sau prin e-mail, la adresa: office@rms.unibuc.ro.

Organizatorii vor decide, până la data de **1 iunie 2007**, asupra acceptării sau respingerii comunicării. Decizia va fi comunicată până la data de **5 iunie 2007**.

Un participant poate prezenta maxim două lucrări, dintre care una în colaborare. Durata unei comunicări este de 15 minute.

Taxa de participare la Conferinţă este de: 20 RON pentru membrii S.S.M.R., 30 RON pentru participanţii din România şi din străinătate care nu sunt membri ai S.S.M.R. Taxa include mapa, ecusonul, CD-ul cu Abstract-urile lucrărilor prezentate, cafea şi va fi achitată în dimineaţa primei zile a Conferinţei, la sediul S.S.M.R.

Ulterior, lucrările Conferinţei vor fi publicate în volum. În acest sens, participanţii vor trimite textul complet al comunicărilor, în formă electronică, în limbaj Latex, până la data de **31 iulie 2007**, pe adresa S.S.M.R. str. Academiei, nr. 14, sector 1, 010014 Bucureşti, sau prin e-mail, la adresa: office@rms.unibuc.ro.

Următoarele teme sunt considerate prioritare pentru această Conferinţă (participanţii pot propune însă şi lucrări cu o altă tematică):

1. Exemple de bune practici în predarea matematicii.
2. Rolul metaforelor şi imaginilor în învăţarea şi înţelegerea matematicii.
3. Reprezentări multiple ale conceptelor matematice.
4. Construirea de structuri mentale în matematică.
5. Argumentare şi demonstraţie în predarea/învăţarea matematicii.
6. Utilizarea calculatorului în învăţarea matematicii.
7. Predarea matematicii pentru elevii dotaţi.
8. Metode de învăţare activă.

Organizatorii intenţionează să desfăşoare mese rotunde pe următoarele teme:

1. Poate fi evaluarea elevilor obiectivă?
2. Cum motivăm elevii pentru învăţarea matematicii?
3. Sunt manualele şcolare utilizate eficient?

Vă rugăm ca, în fişele de înscriere, să vă exprimaţi interesul pentru participarea la aceste mese rotunde.

Sălile de prezentare vor fi prevăzute cu videoproiector şi retroproiector.

Participanţii care solicită cazare pe perioada desfăşurării Conferinţei sunt rugaţi să consemneze acest lucru în fişa de înscriere.

Informaţii suplimentare se pot obţine de la Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Str. Academiei, nr. 14, sector 1, 010014 Bucureşti, tel. 021 314 46 53, fax 021 312 40 72, sau de la următoarele persoane de contact:

Prof. univ. dr. *Radu Gologan* (radu.gologan@imar.ro)

Lector univ. dr. *Cristian Voica* (voica@gta.math.unibuc.ro)

Prof. *Mircea Trifu* (office@rms.unibuc.ro).

The XIth ANNUAL CONFERENCE OF
THE ROMANIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Satellite Conference of the 6th Congress of Romanian Mathematicians
Workshop on Mathematical Education
Bucharest, 26-27 June 2007

Conference venue: University of Bucharest, Facultaty of Mathematics and Informatics, str. Academiei, nr. 14, Bucharest, Romania

Language of communication: Romanian and English

Participation requirements:

An Abstract of your paper with a lenght of one page at the most, written in Word or Latex, will be sent until **15 May 2007**. The Abstract may be posted to: Societatea de Stiinte Matematice, str. Academiei, nr. 14, sector 1, 010014 Bucharest, Romania, or e-mailed to: office@rms.unibuc.ro.

The organizers will decide, by **1 June 2007**, on the acceptance or rejection of your paper. The decision will be communicated to you until 5 June 2007.

A participant may present up to two papers, of which one should be co-authored. One talk should be given in 15 min.

The participation fee is: 20 RON for R.M.S. members, 30 RON for participants from Romania and abroad who are not R.M.S. members. The fee covers the conference materials including a CD containing the Abstracts of the papers presented in the Conference and refreshments and should be paid on the morning of the first day of the Conference at the R.M.S. main office.

Following the Conference the Proceedings will be published. The participants are asked to send the full text of their papers in an electronic form, in Latex, until **31 July 2007**, by post to: Societatea de Stiinte Matematice din România, str. Academiei, nr. 14, sector 1, 010014 Bucuresti, or by e-mail to: office@rms.unibuc.ro.

The following section of interest are considered as priorities in the Conference (however, participants can propose papers on other topics as well):

1. Examples of good practices in teaching mathematics.
2. The role of metaphors and images in learning and understanding mathematics.
3. Multiple representations of mathematical concepts.
4. Building of mental structures in mathematics.
5. Argumentation and demonstration in teaching/learning mathematics.
6. Use of computer in learning mathematics.
7. Teaching mathematics to gifted students.
8. Active learning methods.

The organizers intend to organize round tables on topics as follows:

1. Can students' evaluation be objective?
2. How do we motivate students to learn mathematics?
3. Are the school textbooks used efficiently?

Please be so kind and, in the application form, express your interest to take part in these round tables.

The conference rooms will be equipped with video and overhead projectors.

The participants who need accommodation are asked to mention it in the application form.

For further information please contact Societatea de Stiinte Matematice din România, Str. Academiei, nr. 14, sector 1, 101104 Bucuresti, tel. +00 40 21 314 46 53, fax +00 40 21 312 40 72, or write to the following persons of contact:

Prof. Dr. *Radu Gologan* (radu.gologan@imar.ro)

Lector Dr. *Cristian Voica* (voica@gta.math.unibuc.ro)

Prof. *Mircea Trifu* (office@rms.unibuc.ro).

A XI-a CONFERINŢĂ ANUALĂ
A SOCIETĂŢII DE STIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
Conferinţa satelit a celui de al 6-lea Congres al Matematicienilor Români
Workshop on Mathematical Education
Bucureşti, 26-27 iunie 2007

FIŞĂ DE ÎNSCRIERE

NUMELE ŞI PRENUMELE ....
GRADUL ŞI FUNCŢIA DIDACTICĂ ....
LOCUL DE MUNCĂ ....
ADRESA: STRADA ....
ORAŞUL .... CODUL ....
TELEFON .... E-MAIL ....
MEMBRU AL S.S.M.R. ☐ DA ☐ NU

DORESC SĂ PARTICIP LA TEMA (Va rugăm să bifaţi tema aleasă):

1. Exemple de bune practici în predarea matematicii.
2. Rolul metaforelor şi imaginilor în învăţarea şi înţelegerea matematicii.
3. Reprezentări multiple ale conceptelor matematice.
4. Construirea de structuri mentale în matematică.
5. Argumentare şi demonstraţie în predarea/învăţarea matematicii.
6. Utilizarea calculatorului în învăţarea matematicii.
7. Predarea matematicii pentru elevii dotaţi.
8. Metode de învăţare activă.
9. .... (Va rugăm să menţionaţi tema în care se încadrează lucrarea dvs., în cazul în care aceasta nu se referă la una din temele de mai sus).

TITLUL COMUNICĂRII: ....
ACEASTĂ LUCRARE A MAI FOST PREZENTATĂ:
☐ NU ☐ DA la ....

DORESC SĂ PARTICIP LA MASA ROTUNDĂ CU TEMA (Va rugăm să bifaţi tema aleasă):

1. Poate fi evaluarea elevilor obiectivă?
2. Cum motivăm elevii pentru învăţarea matematicii?
3. Sunt manualele şcolare utilizate eficient?

Doresc cazare:
☐ DA ☐ NU

Informaţii legate de cazare se pot obţine la tel. 021 314 46 53, sau la adresa de e-mail: office@rms.unibuc.ro.

....

Vă rugăm să trimiteţi **fişa completată**, însoţită de **Abstract**-ul lucrării, pe adresa de e-mail: office@rms.unibuc.ro, sau la adresa: Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Str. Academiei, nr. 14, Sector 1, 010014 Bucureşti, **până la data de 15 mai 2007**.

Informaţii suplimentare se pot obţine de la Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Str. Academiei, nr. 14, sector 1, 101104 Bucureşti, tel. 021 314 46 53, fax 021 312 40 72, sau de la următoarele persoane de contact:

Prof. univ. dr. *Radu Gologan* (radu.gologan@imar.ro)
Lector univ. dr. *Cristian Voica* (voica@gta.math.unibuc.ro)
Prof. *Mircea Trifu* (office@rms.unibuc.ro)