J. N. Srivastava et al., eds., *A Survey of Combinatorial Theory*

CHAPTER 16

Nombres d'Euler et Permutations Alternantes

D. FOATA†
University of Florida, Gainesville, Fla., U.S.A.
et
M.-P. SCHÜTZENBERGER
Université de Paris VII et I.R.I.A., France

1. Introduction

Les entiers apparaissant dans le développement de Taylor des fonctions élémentaires de l'analyse classique sont souvent susceptibles d'interprétations combinatoires, qui donnent une signification géométrique à certaines de leurs propriétés. Réciproquement, de nombreux problèmes d'énumération d'objets rudimentaires conduisent à des fonctions génératrices remarquables, et il parait utile d'explorer systématiquement ces liaisons.

Le présent travail est la première partie d'une étude sur les nombres D_n ($n \in \mathrm{N}$) définis par le développement

$$\sum_{1 \leqslant n} D_n u^n/n! = D(u)$$

de la fonction

$$D(u) = \int_0^u (\mathrm{tg}\, u + (\cos u)^{-1})\, du.$$

Pour $n = 2m$ pair, on retrouve donc les *nombres tangents* D_{2m}

$$D_{2m} = 2^{2m-1}(2^{2m}-1)m^{-1}B_m,$$

où

$$B_m = 2\zeta(2m)(2\pi)^{-2m}(2m)!$$

est le $2m$-ième *nombre de Bernoulli.* Pour $n = 2m+1$, les nombres D_{2m+1} sont les *nombres sécants*, dits aussi *nombres d'Euler*. Ces nombres ont fait l'objet de très nombreuses études arithmétiques dont un exposé systématique d'ensemble a été donné par Nielsen [1923] dans son *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli.* D'autre part, la table la plus complète des premières valeurs de ces nombres apparaît dans Buckholtz et Knuth [1967].

Les relations

$$\exp D(u) = D''(u) = (\tfrac{1}{2})(1 + D'^2(u)), \tag{1.1}$$

$$D(0) = 0 \tag{1.2}$$

entraînent

$$D'(u) = (1 + tg\, \tfrac{1}{2}u)(1 - \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}u)^{-1} \tag{1.3}$$

† On leave from the Université de Strasbourg, 1971–72.

et les identités

$$\exp D_{(2)} = D_{(1)'}, \tag{1.4}$$

$$D_{n+3} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right] D_{i+1} D_{n+2-i}, \tag{1.5}$$

$$2D_{n+2} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right] D_{i+1} D_{n-i+1} + \delta_{n,0}, \tag{1.6}$$

$$D_{2n+1} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left[\begin{smallmatrix} 2n-1 \\ 2i \end{smallmatrix}\right] D_{2i+1} D_{2n-2i}, \tag{1.7}$$

où, dans la première, l'on a posé

$$D_{(2)} = \sum_{1 \leqslant n} (u^{2n}/(2n)!) D_{2n} \left(= \int_0^u \operatorname{tg} u \, du \right)$$

et

$$D_{(1)} = \sum_{0 \leqslant n} (u^{2n+1}/(2n+1)!) D_{2n+1} = D - D_{(2)}.$$

A leur tour, ces identités fournissent les congruences élémentaires suivantes valables pour tout nombre premier impair p

$$D_{p+3} \equiv D_{p+2} + D_{p+1}; \tag{1.8}$$

$$D_{p+2} \equiv D_{p+1} \equiv D_p + 1. \tag{1.9}$$

D'un point de vue combinatoire, André [1879, 1881] a montré que D_{n+1} est le nombre des *permutations alternantes* sur $[n]$, c'est-à-dire des permutations $x_1 x_2 \ldots x_n$ des éléments de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ telles que x_{2j} soit à la fois inférieur à x_{2j-1} et à x_{2j+1} pour tout entier j tel que $0 < 2j < n$ et, en plus, si n est pair, telles que $x_n < x_{n-1}$.

De façon indépendante, Kermack et McKendrick [1938] ont étudié une distribution qui équivaut à celle des "pics" et des "creux" sur les permutations du groupe symétrique sur $[n]$: étant donnée une telle bijection $f: [n] \to [n]$, un pic (resp. creux) est une valeur $j \in [n]$ telle que jf soit plus *grande* (resp. *petite*) que les deux valeurs adjacentes $(j-1)f$ et $(j+1)f$. Sous cette forme, les calculs de Kermack et McKendrick ont été repris par David et Barton [1962] dans leur ouvrage *Combinatorial Chance*. Les fonctions génératrices associées sont des polynômes qui se rencontrent aussi dans la représentation des polynômes eulériens comme sommes de monômes $t^p(1+t)^m$ à coefficients entiers non négatifs (cf. Foata et Schützenberger [1970]). Une transformation simple les ramène à des polynômes à deux variables $D_n(s, t)$ prenant la valeur D_n pour $s = t = 1$. Ce sont ces derniers que nous appellerons *polynômes d'André* et dont nous nous proposons ici d'aborder l'étude.

Dans la section 2 suivante nous établissons les principales formules concernant les polynômes d'André. En particulier, une formule explicite pour leur fonction génératrice est donnée. Cette section est de nature purement analytique.

Ainsi qu'il se produit souvent dans ce domaine, une meilleure compréhension de objets est atteinte en opérant dans une algèbre non commutative.

Nous introduisons donc dans la section 3 les polynômes d'André *non commutatifs*, qui sont eux susceptibles de plusieurs interprétations. La place nous a manqué pour donner toutes celles qu'exigerait une vérification géométrique des identités données à la deuxième section. Nous nous sommes donc bornés à discuter ce que nous appelons les "permutations d'André", grâce auxquelles diverses identités binomiales au sens de Mullin et Rota [1970] s'expliquent en termes de variation. Un article ultérieur traitera des "complexes d'André" qui permettent de retrouver certaines propriétés fondamentales de symétrie.

Il est clair que la plupart de nos énoncés pourraient aussi bien être présentés dans le langage statistique qui fut celui d'une grande partie de notre carrière. Notre choix d'une formulation moins spéciale est un hommage à notre Maître Bose dont l'oeuvre a tant illustré les enrichissements mutuels de la mathématique et de ses applications.

Nous remercions notre ami John Riordan de nous avoir signalé l'article de Kermack et McKendrick [1938] et d'avoir bien voulu relire et commenter une première version de cet article.

2. Les polynômes d'André

2.1. Définition et propriétés élémentaires

Soit D une fonction réelle de la variable u, analytique à l'origine et satisfaisant l'équation différentielle

$$D'' = t \exp D, \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales

$$0 = D(0), \qquad s = D'(0), \tag{2.2}$$

où s et t sont des constantes. En raison de $0 = D(0)$, la relation (2.1) est équivalente à

$$D''' = D'D''. \tag{2.3}$$

Nous posons

$$D = \sum_{0 \leqslant n} (u^n/n!) D_n,$$

où, d'après (2.1) et (2.2), $D_0 = 0$, $D_1 = s$, $D_2 = t$. Considérant s et t comme des paramètres, les relations (2.1) et (2.3) déterminent de façon univoque par récurrence sur n les D_n comme polynômes en s et t. Ce sont eux que nous appellerons *polynômes d'André* et que nous désignerons dans cette section par $D_n = D_n(s, t)$ $(n \geqslant 0)$. La liste des premiers d'entre eux est la suivante:

$$D_0 = 0, \qquad D_1 = s, \qquad D_2 = t, \qquad D_3 = st,$$
$$D_4 = s^2t + t^2, \qquad D_5 = s^3t + 4st^2,$$
$$D_6 = s^4t + 11s^2t^2 + 4t^3, \qquad D_7 = s^5t + 26s^3t^2 + 34st^3.$$

Les valeurs $D_n(1, 1)$ sont entières et sont bien les coefficients de la fonction

$D(u)$ présentée dans l'introduction puisque celle-ci était définie par l'équation différentielle

$$D'' = \exp D$$

avec les valeurs initiales

$$D(0) = 0, \qquad D'(0) = 1 (= s)$$

et que l'on avait donc

$$D''(0) = \exp 0 = 1 (= t).$$

Soit maintenant l'opérateur

$$\Delta = st\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial s}.$$

On a

$$\Delta D_1 = t = D_2 \qquad \text{et} \qquad \Delta D_2 = st = D_3.$$

Observant que (2.3) équivaut à l'identité binomiale

$$D_{n+3} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \left[{n \atop j}\right] D_{j+1} D_{n+2-j} \qquad (n \geqslant 0), \tag{2.4}$$

on en conclut que

$$D_{n+1} = \Delta D_n \qquad (n \geqslant 1), \tag{2.5}$$

soit encore, en tenant compte de la valeur initiale $D_1 = s$,

$$s + \Delta D = \frac{\partial}{\partial u} D. \tag{2.6}$$

Ces relations montrent que les polynômes d'André ont les propriétés élémentaires suivantes:

Propriété 2.1. *Les polynômes D_n sont homogènes de degré total n en les variables s et $\sqrt{t}$. Ils sont divisibles par t pour $n \geqslant 2$ et leurs coefficients sont des entiers positifs.*

On a donc pour chaque $n \geqslant 2$,

$$D_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n/2} s^{n-2k} t_k \, \mathrm{d}_{n,k},$$

où les coefficients $d_{n,k}$ sont des entiers naturels et la relation (2.5) livre immédiatement la propriété suivante.

Propriété 2.2. *Pour $n \geqslant 2$, on a $d_{n,1} = 1$, et pour $2 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}n$, on a*

$$d_{n+1,k} = k\, d_{n,k} + (n+2-2k)\, d_{n,k-1}. \tag{2.7}$$

Par conséquent, tous les $d_{n,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}n)$ sont positifs. Posant maintenant

$$\bar{D}_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n/2} \bar{t}^k d_{n,k},$$

la même relation (2.5) donne la formule de récurrence

$$\bar{D}_{n+1} = n\bar{t}\bar{D}_n + (\bar{t} - 2\bar{t}^2)\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\bar{D}_n \qquad (n \geqslant 2) \tag{2.8a}$$

qui est équivalente à

$$\bar{\bar{D}}_{n+1} = \bar{t}(1-2\bar{t})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\bar{D}}_n, \tag{2.8b}$$

où

$$\bar{\bar{D}}_n = (1-2\bar{t})^{-n/2}\, \bar{D}_n.$$

On notera qu'en raison de (2.7) le polynôme D_n est divisible par s ssi n est impair.

2.2. Une relation différentielle

Nous établissons maintenant la généralisation naturelle de la deuxième égalité dans la relation (1.1).

Propriété 2.3. *On a l'identité*

$$2D'' = 2t-s^2+D'^2. \tag{2.9}$$

Preuve. D'après (2.4) et (2.5), on a pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$D_{n+3} = \Delta D_{n+2} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} [{}^n_j](\Delta D_j)D_{n+2-j}.$$

Tenant compte de la symétrie des indices et de $[{}^n_j] = [{}_{n-j}^{\;n}]$, ceci donne

$$2\Delta D_{n+2} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} [{}^n_j]\Delta(D_{j+1}D_{n+1-j}),$$

d'où

$$2D_{n+2} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} [{}_j]D_{j+1}D_{n+1-j}+K_n, \tag{2.10}$$

où K_n est une fonction de s et t telle que $\Delta K_n = 0$. Comme les D_j sont des polynômes, K_n est un polynôme. D'autre part, comme

$$\Delta(t^p s^q) = pt^p s^{q+1}+qt^{p+1}s^{q-1} \qquad (p, q \in N),$$

on voit que le terme de plus bas degré de K_n en t ne peut s'annuler que si ce degré est zéro. Comme, d'après la propriété 2.1, on a $D_{n+2}(s, 0) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, le polynôme K_n est nul pour $n \geqslant 1$. Enfin, on vérifie directement que $K_0 = 2t-s^2$. Ceci fait, la formule (2.9) s'obtient par sommation.

On notera que pour $n+2 = 2m+1$ impair, l'expression (2.10), avec $K_n = 0$, est symétrique et peut par conséquent s'écrire sous la forme (1.7) de l'introduction, soit de façon équivalente

$$D_{2m+1}/(2m-1)! = \sum_{0\leqslant j\leqslant m-1} (D_{2j+1}/(2j)!)(D_{m-2j}/(2m-2j-1)!);$$

c'est-à-dire

$$D_{(1)''} = D_{(1)'}D_{(2)'}, \tag{2.11}$$

avec les notations déjà introduites dans le cas particulier de $s = t = 1$,

$$D_{(2)} = \sum_{0\leqslant m} (u^{2m}/(2m)!)D_{2m}(s, t),$$

$$D_{(1)} = D-D_{(2)}.$$

Nous en déduisons la formule suivante qui est la contre-partie polynomiale de (1.4).

Propriété 2.4. *On a*

$$D_{(1)'} = s \exp D_{(2)}. \tag{2.12}$$

Preuve. La formule (2.11) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial u}\log D_{(1)'} = \frac{\partial}{\partial u} D_{(2)'}.$$

D'où

$$D_{(1)'} = K(s, t) \exp D_{(2)},$$

où $K(s, t)$ est une fonction de s et t qui est déterminée en faisant $u = 0$ et en constatant que $D_2(u = 0) = 0$ et $D_{(1)'}(u = 0) = s$.

2.3. Fonction génératrice des polynômes d'André

Nous donnons maintenant des formules explicites pour D, D' et D''.

Propriété 2.5. *Posant* $r = (s^2-2t)^{\frac{1}{2}}$, $w = (s-r)/(s+r)$ *et* $E = \exp ru$, *on a les formules*

$$D = ru+2\log((1-w)/(1-wE)); \tag{2.13}$$

$$D' = r(1+wE)/(1-wE); \tag{2.14}$$

$$D'' = wr^2E/(1-wE)^2. \tag{2.15}$$

Preuve. L'équation (2.9) peut s'écrire

$$r = D''((D'-r)^{-1}-(D'+r)^{-1}),$$

d'où par intégration

$$ru = \log((D'-r)/(D'+r))+K(s, t),$$

où la fonction $K(s, t)$ est déterminée en faisant $u = 0$ et se trouve par conséquent égale à $-\log w$. Donc $(D'-r)/(D'+r) = w\exp ru$, ce qui est équivalent à (2.14). Maintenant le membre de droite de cette dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$r(1+(2w\exp ru)/(1-w\exp ru)),$$

d'où par une nouvelle intégration

$$D = ru-2\log(1-w\exp ru)+K(s, t).$$

Faisant de nouveau $u = 0$, on trouve

$$K(s, t) = 2\log(1-w).$$

On obtient ainsi la formule (2.13). Enfin, la formule (2.15) s'obtient par simple dérivation.

Désignons par $D_{(0)'}$ la valeur du membre de droite de (2.14) pour $s = 0$. Posant $v = (2t)^{\frac{1}{2}}u$ et observant que $w = -1$ pour $s = 0$, on trouve

$$D_{(0)'} = (2t)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{i}(1-\exp \mathrm{i}v)/(1+\exp \mathrm{i}v),$$

soit

$$D_{(0)'} = (2t)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v. \tag{2.16}$$

Ce résultat a la conséquence très remarquable suivante:

Propriété 2.6. *Pour tout k positif, les coefficients* $d_{2k-1,k-1}$ *et* $d_{2k,k}$ *sont égaux a* $2^{1-k}[D_{2k}]_{s=t=1}$, *c'est-à-dire a* 2^{1-k} *fois le k-ème nombre d'Euler.*

Preuve. Prenant $n = 2k-1$, la récurrence (2.8) donne

$$d_{2k,k} = k\, d_{n,k} + (2k-1+2-2k)\, d_{n,k-1} = d_{2k-1,k-1}$$

puisque $d_{n,k} = 0$ en vertu de $n < 2k$. Les deux coefficients d mentionnés dans l'énoncé sont donc égaux.

Maintenant pour vérifier leur égalité avec le nombre $2^{1-k}[D_{2k}]_{s=t=1}$, il suffit d'observer que pour $s = 0$, tous les polynômes D_{2k-1} sont nuls et chacun des polynômes D_{2k} se réduit à $d_{2k,k}t^k$. Par conséquent,

$$D_{(0)'} = \sum_{1\leqslant k} (u^{2k-1}/(2k-1)!)\, d_{2k,k}t^k.$$

On peut alors appliquer la formule (2.16) qui s'écrit

$$D_{(0)'} = (2t)^{\frac{1}{2}} \sum_{1\leqslant k} (u^{2k-1}/(2k-1)!)(\tfrac{1}{2}t)^{(2k-1)/2} D_{2k},$$

soit

$$D_{(0)'} = \sum_{1\leqslant k} (u^{2k-1}/(2k-1)!) 2^{1-k} D_{2k} t^k.$$

Nous donnons enfin la formule binomiale

$$2d_{2n+2,n+1} = \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} \left[{2n \atop 2i+1}\right] d_{2i+2,i+1} d_{2n-2i,n-i} \qquad (n \geqslant 1), \qquad (2.17)$$

qui se déduit immédiatement de la formule (2.9) lorsqu'on y fait $s = 0$ et $t = 1$, grâce à la propriété 2.6.

2.4. Relations avec les polynômes eulériens

Nous terminons cette section en établissant une relation entre les polynômes d'André et les polynômes eulériens. Pour la définition de ces derniers, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Riordan [1958], pp. 213–216, ou à notre précédent mémoire (Foata et Schützenberger [1970]).

Propriété 2.7. *Pour tout entier $n > 0$, le n-ème polynôme eulérien $A_n(x)$ est égal à*

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant (n+1)/2} d_{n+1,k}(2x)^{k-1}(1+x)^{n+1-2k},$$

où les $d_{n+1,k}$ sont les coefficients du $(n+1)$-ème polynôme d'André.

Preuve. Faisons la substitution

$$s = 1, \qquad t = 2x/(1+x)^2, \qquad u = (1+x)v$$

dans l'expression de $(D'-s)/t$ donnée par (2.14). Notant que la substitution envoie r sur $(1-x)/(1+x)$ et w sur x, on trouve

$$\frac{(1+x)\{\exp[(1-x)v]-1\}}{1-x\exp[(1-x)v]}.$$

Divisant par $1+x$, et ajoutant 1, on obtient

$$\frac{(1-x)\exp[(1-x)v]}{1-x\exp[(1-x)v]},$$

qui est l'expression classique de la fonction génératrice exponentielle des polynômes eulériens. Donc, pour $n > 0$, $A_n(x)$ est le polynôme obtenu en faisant la substitution $s = 1$, $t = 2x/(1+x)^2$ dans $(1+x)^{n-1}t^{-1}D_{n+1}$, ce qui est précisément le résultat annoncé.

On pourra noter que la relation de symétrie $x^n A_n(x^{-1}) = A_n(x)$ correspond à l'invariance $t = 2x^{-1}/(1+x^{-1})^2$.

3. Les permutations d'André

3.1. Quelques notions générales

Nous commençons par décrire en détail quelques notions de base.

Soit X un ensemble totalement ordonné ayant un nombre fini n d'éléments. Une *permutation* de X est une bijection $f\colon [n] \to X$ où $[n]$ désigne l'ensemble ordonné $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($= \emptyset$ si $n = 0$). Nous l'identifierons au *mot* $1f \,.\, 2f \,.\, \ldots \,.\, nf$ en les lettres de X. Puisque f est une bijection, chaque élément de X figurera exactement une fois dans ce mot. Pour abréger, nous écrirons $f \in X^!$ pour indiquer que f est une permutation de X ou son mot associé.

Soient maintenant $n \geqslant 2$ et $f \in X^!$; la *variation* de f est le mot $fV = v_1 v_2 \ldots v_{n-1}$ de longueur $n-1$ en les symboles $v_j = (+)$ et $(-)$ qui est défini pour chaque $j \leqslant n-1$ par

$$\begin{aligned} v_j &= + \text{ si } jf < (j+1)f, \\ &= - \text{ si } jf > (j+1)f. \end{aligned}$$

Il est classique de dire que $[j, j+1]$ est une *montée* (resp. *descente*) ssi $v_j = +$ (resp. $= -$).

Soit maintenant $1 < j < n$:

$-[j-1, j+1]$ est une *double descente* ssi $[j-1, j]$ et $[j, j+1]$ sont deux descentes;

$-j$ est un *creux* ssi $[j-1, j]$ est une descente et $[j, j+1]$ une montée.

De façon analogue, la *variation circulaire* $f\mathring{V}$ est le mot de longueur n défini par $f\mathring{V} = fV \,.\, v_n$, où $v_n = +$ ou $-$ selon que $nf < 1f$ ou $nf > 1f$; autrement dit, v_n est défini pour $[n, 1]$ de la même manière que v_j était défini pour $[j, j+1]$.

D'une manière générale, une notion sera dite *circulaire* ssi dans sa définition il est convenu que "$n+1$" signifie "1". Par exemple pour $X = [8]$ et $f\colon [8] \to X$ identifié à $5\,8\,1\,6\,9\,2\,3\,4\,7$ on a $fV = + - + + - + + +$ $(\in \{+, -\}^8)$, 1 et 2 sont les deux creux et f n'a pas de double descente. Comme $7 > 5$ on a $v_n = -$ et $f\mathring{V} = + - + + - + + + -$ $(\in \{+, -\}^9)$; enfin comme $7 > 5$, mais $5 < 8$, la permutation f est sans *double descente circulaire*, donc aussi sans double descente.

Nous introduisons maintenant une notion plus spéciale et nous définissons la *variation réduite* de f comme le mot fU de longueur $\leqslant n-1$ en les symboles t et s qui est obtenu à partir de la variation fV en remplaçant d'abord toutes les paires $v_i v_{i+1}$ telles que $v_i = -$, $v_{i+1} = +$ par t, ensuite en remplaçant par

s les v_i restants. Par construction, $fU = s$ ssi $n = 2$. Dans notre exemple $fU = ststss$ puisque $fV = +(-+)+(-+)++$.

Rappelons la notation standard $|f|_x$ pour désigner le nombre d'occurrences d'une lettre x dans un mot f.

Propriété 3.1. *Le nombre des creux de f est $|fU|_t$, celui des montées est $\leqslant |fU|_t + |fU|_s$ avec égalité ssi f est sans double descente et se termine par une montée (c'est-à-dire $v_{n-1} = +$).*

La preuve est immédiate.

On définit de la même manière la *variation réduite circulaire* $f\mathring{U}$ en convenant d'écrire la lettre t à la fin du mot fU quand n est un creux circulaire (c'est-à-dire quand $v_{n-1} = -$ et $v_n = +$) et au début quand 1 est un *creux circulaire* (c'est-à-dire quand $v_n = -$ et $V_1 = +$). C'est ce second cas qui se produit dans notre exemple et l'on a donc

$$f\mathring{U} = t\,t\,s\,t\,s\,s,$$

puisque $f\mathring{V} = +)\,(-+) + (-+) + + (-$.

On notera que si $n = 2, f\mathring{U}$ est toujours t.

On *conviendra* pour $n = 1, f\mathring{U} = s$ et $fU = e$ (c'est-à-dire le mot vide du monoide libre $\{s, t\}^*$).

3.2. Définition des permutations d'André

Nous appellerons *permutation d'André* sur X $(0 \leqslant \text{card}\ (X) = n < \infty)$ toute permutation $f\colon [n] \to X$ *sans double descente* satisfaisant la condition caractéristique suivante:

(A) Soient $j, j' \in [n]$ tels que $1 < j < j'$ et

$$(j-1)f = \max\{(j-1)f, jf, (j'-1)f, j'f\},$$
$$j'f = \min\{(j-1)f, jf, (j'-1)f, j'f\}.$$

Il existe un j'' tel que $j < j'' < j'$ et que $j''f < j'f$.

De façon intuitive, en tenant compte de ce que f n'a pas de double descente, la condition peut être reformulée ainsi.

Si j et $j' > j$ sont deux creux tels que $jf > j'f$ et $(j-1)f > (j'-1)f$, il existe un creux j'' entre j et j' $(j < j'' < j')$ tel que $j''f < j'f$ et la même condition vaut quand $j' = n$ et que $[j'-1, j']$ est une descente.

Il résulte immédiatement de la définition que toute permutation ayant 0 ou 1 descente est une permutation d'André, car elle n'a pas de double descente et la deuxième condition est trivialement vérifiée.

Une permutation f ayant exactement deux descentes $[j, j+1]$ et $[j', j'+1]$ $(j < j')$ est une permutation d'André ssi les deux conditions suivantes sont réalisées

(i) $j+1$ et $j'+1$ sont des creux ou bien $j+1$ est un creux et $[j', j'+1]$ est une descente finale;

(ii) l'on a $jf < j'f$ ou bien $jf > j'f$ et $(j-1)f < (j'-1)f$.

Pour avoir une idée concrète de cette condition, le lecteur pourra vérifier que parmi les six permutations de [6] qui sont de la forme $x\,2\,y\,3\,z\,1$ ($\{x, y, z\} = \{4, 5, 6\}$) et qui sont donc sans double descente puisqu'alternées, les permutations d'André sont les deux pour lesquelles $z = 6$.

En effet, puisque $2 = 2f < 3 = 4f$, la condition caractéristique ne s'applique qu'aux paires de creux $j = 2$ ou 4 et $j' = 6 > j$. Comme $jf = 2$ ou $4 > j'f = 1$ et comme il n'existe aucun creux j'' entre j et j' tel que $j''f < jf$ (puisque $4f = 3 > 6f = 1$), on doit avoir $(j-1)f < (j'-1)f$, c'est-à-dire $x < z$ et $y < z$.

Nous noterons D_n^* $(0 \leqslant n)$ l'ensemble des permutations d'André sur $[n]$ et $D^* = \bigcup_{0 \leqslant n} D_n^*$, en faisant comme d'usage la convention naturelle que pour $n = 0$, D_0^* est un singleton. Voici une table des D_n^* pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
&D_0^* = \{e\}, \qquad D_1^* = \{1\}, \qquad D_2^* = \{12, 21\},\\
&D_3^* = \{123, 132, 213, 231, 312\},\\
&D_4^* = \{1234, 1243, 1324, 1342, 1423,\\
&\qquad\ 2134, 2143, 2314, 2341, 2413,\\
&\qquad\ 3124, 3142, 3241, 3412,\\
&\qquad\ 4123, 4132\}.
\end{aligned}$$

On notera que $1 = \text{Card } D_0^* = \text{Card } D_1^*$; $2 = \text{Card } D_2^*$; $5 = \text{Card } D_3^*$; $16 = \text{Card } D_4^*$.

Par abus de notation, si $I = \{n'+1, \ldots, n'+m\}$ est un intervalle de $[n]$ et $f: [n] \to X$ une permutation, nous identifierons la restriction $f \mid I$ à la permutation $f': [m] \to If$ $(If \subset X)$ telle que $jf' = (n'+j)f$ identiquement.

Lemme 3.2. *Soit $f: [n] \to X$ une permutation d'André. Pour tout intervalle I de $[n]$, la restriction $f' = f \mid I$ de f à I est une permutation d'André.*

Preuve. Ceci découle de la structure des conditions "être sans double descente" et (A) qui ne font intervenir que les éléments d'un intervalle.

Nous introduisons maintenant deux familles spéciales de permutations d'André que nous appellerons respectivement (par abus de langage) *circulaires* et *augmentées*. Soit X un ensemble fini de cardinal n $(n \geqslant 0)$; une permutation d'André f sur X est dite *circulaire* (resp. *augmentée*) ssi son dernier élément nf est égal à $\min f$ (resp. $\max X$). On note D (resp. A) l'ensemble des permutations d'André appartenant à D qui sont circulaires (resp. augmentées); on pose $D_n = D \cap D_n^*$ et $A_n = A \cap D_n^*$ $(n > 0)$ et l'on convient que D_0 est vide et que $A_0 = D_0^* = \{e\}$. On voit sur la liste ci-dessus que $\text{Card } D_j = \text{Card } A_j = 1$ pour $j = 1, 2$; $\text{Card } D_3 = 1$; $\text{Card } A_3 = 2$; $\text{Card } D_4 = 2$; $\text{Card } A_4 = 5$.

Propriété 3.3. *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $f: [n+2] \to X$ une permutation quelconque telle que*

(i) $$(n+2)f = \min X.$$

Les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(1) *La permutation f est une permutation d'André (qui est nécessairement circulaire).*

(2) *La restriction $f' = f \mid [n+1]$ est une permutation d'André augmentée.*

(3) *La restriction $f'' = f \mid [n] = f' \mid [n]$ est une permutation d'André et*

(ii) $$j \in [n] \Rightarrow jf'' < (n+1)f'.$$

Preuve. Le lemme 3.2 donne immédiatement les implications

$$f \in D^* \Rightarrow f' \in D^* \Rightarrow f'' \in D^*.$$

Supposons (1) et prenons $j' = n+2$. D'après (i), d'une part $[j'-1, j']$ est une descente, d'autre part on ne peut pas avoir $j''f < j'f$ pour $j'' < j'$. Donc d'après (A) on aura $(j-1)f < (j'-1)f$ pour tout $j < j'$ tel que $[(j-1), j]$ soit une descente.

Considérons $\bar{j}$ tel que $(\bar{j}-1)f = \max X$; le couple $[\bar{j}-1, \bar{j}]$ est une descente et par conséquent $\bar{j} = j'$, c'est-à-dire $(n+1)f = \max X$. La condition (1) implique donc (2).

Réciproquement supposons (3), c'est-à-dire que la restriction $f \mid [n]$ est une permutation d'André et que l'on a $(n+1)f = \max X$, $(n+2)f = \min X$. Il est clair que f n'a pas de double descente. D'autre part, prenant encore $j' = n+2$, la condition (A) est toujours satisfaite car il ne peut pas exister de creux $j < j'$ pour lequel $(j-1)f > (j'-1)f$. Donc (3) $\Rightarrow$ (1) et comme (2) $\Rightarrow$ (3) trivialement d'après $f' \in D^* \Rightarrow f'' \in D^*$, le résultat est établi.

Corollaire 3.4. *Pour tout $n \geqslant 0$, les ensembles D_{n+2}, A_{n+1} et D_n^* ont même cardinalité.*

3.3. Polynômes d'André en variables non commutatives

Pour simplifier, on appellera *polynômes d'André non commutatifs* les polynômes

$$A_n U = \sum \{fU : f \in A_n\},$$
$$D_n \mathring{U} = \sum \{f\mathring{U} : f \in D_n\} \qquad (n \geqslant 0)$$

en les variables non commutatives s et t. Dans la propriété 3.10 ci-après, on trouvera deux relations de récurrence sur ces polynômes. Enfin, la liste des polynômes pour les premières valeurs de n est donnée à la fin de cette section.

Lemme 3.5. *Soit f: $[n+1] \to X$ une permutation d'André. Il existe exactement une valeur $m \leqslant n$ telle que*

(i) $f \mid [m] \in D$;

(ii) $m' \geqslant m, f \mid [m'] \in D \Rightarrow m' = m$.

Preuve. Il suffit de prendre $m = (\min X)f^{-1}$ et d'observer que $m = (\min ([m']f))f^{-1}$ pour tout $m' \geqslant m$.

On notera $f^{(1)}$ la restriction $f \mid [m]$ ($m = (\min X)f^{-1}$) et on appellera $f^{(1)}$ le *premier facteur* de f. La restriction $f \mid [n] \setminus [m]$ sera le *cofacteur de* $f^{(1)}$ dans f et on utilisera souvent pour abréger la notation $f^{(1)-1}$ pour désigner $[m]$. L'importance de ce lemme est dans sa réciproque.

Propriété 3.6. *Une permutation* f: $[n+1] \to X$ *est une permutation d'André ssi posant* $m = (\min X)f^{-1}$, *les deux restrictions* $f^{(1)} = f \mid [m]$ *et* $f' = f \mid [n] \setminus [m]$ *sont des permutations d'André. Si ces hypothèses sont vérifiées et* $n \geqslant 1$, f *est augmentée si et seulement s'il en est de même de* f'.

Preuve. La partie directe résulte des lemmes 3.5 et 3.2. Supposons donc $f^{(1)}$, $f' \in D^*$ et sans perte de généralité $m < n$. Comme $mf = \min X$, $[m, m+1]$ est une montée. Donc f n'a pas de double descente puisque ni $f^{(1)}$ ni f' n'en ont.

Soit maintenant j et j' deux valeurs justiciables de la condition (A). Si $j, j' \in [m]$ ou $\in [n] \setminus [m]$, la condition (A) est satisfaite par f d'après l'hypothèse $f^{(1)}, f' \in D^*$. Si au contraire $j > m > j'$, la condition (A) est satisfaite par l'existence du creux $j'' = m$ entre j et j'.

Lemme 3.7. *Soit* f: $[n+1] \to X$ *une permutation d'André circulaire. Si* $n = 0$, $f\mathring{U} = s$ *et si* $n > 0$, $f\mathring{U} = (f'U)t$ *où* $f' = f \mid [n]$. *Par conséquent,*

$$D_{n+1}\mathring{U} = (A_n U)t \qquad \textit{pour } n > 0.$$

Preuve. Le cas de $n = 0$ résulte de la définition même de $\mathring{U}$. Si $n \geqslant 1$, la variation de f se termine par une descente puisque $nf = \max X$, $(n+1)f = \min X$. Comme $(n+1)f < 1f$, la formule est encore une conséquence de la définition de $\mathring{U}$.

Lemme 3.8. *Soit* f: $[n+3] \to X$ *une permutation d'André circulaire. On a*

$$f\mathring{U} = g^{(1)}\mathring{U} \, . \, \bar{f}\mathring{U},$$

où $g^{(1)}$ *est le premier facteur de* $g = f \mid [n+1]$ *et* $\bar{f}$ *le cofacteur de* $g^{(1)}$ *dans* f.

Preuve. Le facteur $g^{(1)}$ est la restriction de f à $[m']$ où $m'f$ est le minimum de X privé de $\min X = (n+3)f$ et de $\max X = (n+2)f$. Donc $[m', m'+1]$ est toujours une montée de f.

Distinguons maintenant deux cas:

(i) $m' = 1$. On a $fV = +\bar{f}V$. Comme $\bar{f}\mathring{U}$ se termine par t puisque $n+3-m' \geqslant 2$, on a donc $f\mathring{U} = s \, . \, \bar{f}\mathring{U}$ et le résultat est établi.

(ii) $m' > 1$. Comme $g^{(1)} \in D$, $g^{(1)}$ se termine par la descente $[m'-1, m']$. Donc $fU = (g^{(1)}U)' \, t \, (\bar{f}U)$, où $(g^{(1)}U)'$ désigne le mot obtenu en supprimant le dernier s de $g^{(1)}U$. De façon équivalente, $fU = g^{(1)}\mathring{U} \, . \, \bar{f}U$, d'où encore $f\mathring{U} = g^{(1)}\mathring{U} \, . \, \bar{f}\mathring{U}$.

Corollaire 3.9. *Soit* f: $[n+2] \to X$ *une permutation d'André augmentée. On a*

$$fU = f^{(1)}\mathring{U} \, . \, f'U$$

où $f^{(1)}$ *est le premier facteur de* f *et* f' *son cofacteur.*

Preuve. Définissons la permutation $g:[n+3]\to X'$ par $g\mid[n+2]=f$ et $(n+3)g=\min X'$. Il est clair que g est une permutation d'André circulaire. Soient $g^{(1)}$ le premier facteur de $g\mid[n+1]$ et $\bar g$ le cofacteur de $g^{(1)}$ dans g. On a $g\mathring{U}=(fU)t$ (d'après le lemme 3.7), $f^{(1)}=g^{(1)}$, et enfin $\bar g\mathring{U}=(f'U)t$. Le lemme précédent donne d'autre part l'identité

$$g\mathring{U}=g^{(1)}\mathring{U}\,.\,\bar g\mathring{U},$$

c'est-à-dire

$$(fU)t=f^{(1)}\mathring{U}\,.\,(f'U)t.$$

Le corollaire est donc établi en supprimant la dernière lettre t de l'identité précédente.

Propriété 3.10. *Pour tout $n\geqslant 0$, on a les identités*

$$A_{n+2}U=\sum \left[\begin{smallmatrix}n\\ j\end{smallmatrix}\right]D_{j+1}\mathring{U}\,.\,A_{n+1-j}U, \tag{3.1}$$

$$D_{n+3}\mathring{U}=\sum \left[\begin{smallmatrix}n\\ j\end{smallmatrix}\right]D_{j+1}\mathring{U}\,.\,D_{n+2-j}\mathring{U}. \tag{3.2}$$

Preuve. La propriété 3.6 donne une bijection entre A_{n+2} et les triplés $(X'\cup X'', f^{(1)}, f')$, où $X'\cup X''$ est une partition de $X\setminus\{\min X, \max X\}$, $f^{(1)}$ une permutation circulaire d'André sur $X'\cup\{\min X\}$ et f' une permutation augmentée sur $X''\cup\{\max X\}$. La première formule découle alors du corollaire 3.9 et la deuxième de la première et du lemme 3.7.

Tables 3.11. Pour terminer ce chapitre, nous donnons la liste des polynômes A_nU et $D_n\mathring{U}$ pour les premières valeurs de n. Ces polynômes peuvent être évidemment calculés à partir des formules de récurrence (3.1) et (3.2):

$$\begin{aligned}
A_1U &= 1,\\
A_2U &= s,\\
A_3U &= s^2+t,\\
A_4U &= s^3+2st+2ts,\\
A_5U &= s^4+3s^2t+5sts+3ts^2+4t^2,\\
A_6U &= s^5+4s^3t+9s^2ts+9sts^2+4ts^3+12st^2+10tst+12t^2s;\\
D_1\mathring{U} &= s,\\
D_{n+1}\mathring{U} &= (A_nU)t \text{ pour } n>0.
\end{aligned}$$

4. Remarques

Comme il n'a pas été possible d'inclure dans le même article tous les résultats sur les polynômes d'André en variables non commutatives, nous renvoyons le lecteur à un prochain mémoire. Quelques ultimes remarques nous semblent cependant nécessaires.

Remarque 4.1. On a $D_1\mathring{U}=s$ et $D_2\mathring{U}=t$. D'autre part, la formule de récurrence (3.2) a la même structure formelle que la relation binomiale sur les polynômes *commutatifs* D_n qui s'écrivait en effet (voir formule (2.4))

$$D_{n+3}=\sum \left[\begin{smallmatrix}n\\ j\end{smallmatrix}\right]D_{j+1}D_{n+2-j}\qquad (n\geqslant 0). \tag{4.1}$$

Ceci montre que les polynômes $D_n\mathring{U}$ constituent bien une *version non commutative* des polynômes d'André $D_n(s, t)$.

Remarque 4.2. Lorsque les variables s et t commutent, on a aussi la *formule exponentielle*

$$\sum_{0\leqslant n} (u^n/n!)D_{n+2} = t \exp\left[\sum_{0\leqslant n} (u^n/n!)\, D_n\right]$$

(voir formule (2.1)). En fait, les formules (4.1) et (4.2) sont *équivalentes*. On peut s'en convaincre par l'argument suivant: La série formelle égale à t fois l'exponentielle de $\sum_{0<n} (u^n/n!)D_n$ est unique. Ceci résulte du fait que l'exponentielle est une bijection de l'ensemble des séries formelles sans terme constant sur l'ensemble des séries formelles de terme constant égal à 1. Or par dérivation de (4.2) par rapport à u, et identification des termes de même puissance en u, on obtient justement les formules (4.1).

Cette équivalence n'est *plus* valable lorsqu'on suppose s et t non commutatifs. Plus exactement, on n'a *pas* de formule exponentielle ayant même structure formelle que (4.2) avec les polynômes $D_n\mathring{U}$. Seule subsiste la formule (3.2), qui doit donc être regardée comme la *généralisation non commutative de la formule exponentielle.*

Remarque 4.3. Une autre façon d'établir directement la formule exponentielle (4.2) sans recourir aux arguments analytiques de la section 2 est de faire appel aux techniques purement combinatoires du *composé partitionnel*, développées dans notre précédent mémoire (Foata et Schützenberger [1970]). L'ensemble D^* est, en effet, le composé partitionnel de l'ensemble D des permutations d'André circulaires. Indiquons rapidement comment on peut le démontrer. Soit $f = 1f\,.\,2f\,.\,\ldots\,.\,nf$ $(n > 0)$ une permutation d'André. Elle admet une factorisation unique $(g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(k)})$ telle que

(1) le produit de juxtaposition $g^{(1)}g^{(2)}\ldots g^{(k)}$ soit égal à f;

(2) chaque $g^{(j)}$ est une permutation d'André circulaire;

(3) la suite formée par les dernières lettres des mots $g^{(j)}$ est croissante.

Par exemple, la factorisation de

$$f = 8\;6\;9\;7\;12\;13\;1\;2\;4\;11\;14\;15\;3\;10\;5$$

est donnée par

$$(8\;6\;9\;7\;12\;13\;1,\quad 2,\quad 4\;11\;14\;15\;3,\quad 10\;5).$$

L'existence et l'unicité de cette factorisation peuvent être démontrées en utilisant le lemme 3.8. Supposant s et t commutatifs, on pose pour tout $f \in D_n^*$ $(n > 0)$

$$f\mu\,.\,t = (f\,.\,\overline{n+1}\,.\,0)\mathring{U}.$$

Là encore, à l'aide du lemme 3.8, on peut vérifier que μ est *multiplicative*. D'après la proposition 3.12 de la référence citée plus haut, on en déduit l'identité

$$1+\sum_{0<n} (u^n/n!)D_n^*\mu = \exp\left[\sum_{0<n} (u^n/n!)A_n\mu\right].$$

L'identité (4.2) en résulte en observant que

$$D_n^*\mu \,.\, t = D_{n+2}(s,t) \quad \text{et} \quad A_n\mu = D_n(s,t) \quad \text{pour} \quad n > 0.$$

Remarque 4.4. Nous avons vu dans la propriété 2.3 que l'identité

$$2D_{n+2} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix}\right] D_{j+1}D_{n+1-j} \qquad (n \geqslant 1) \tag{4.3}$$

sur les polynômes *commutatifs* $D_n(s, t)$ se déduisait facilement de l'identité

$$D_{n+3} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix}\right] D_{j+1}D_{n+2-j} \qquad (n \geqslant 0).$$

Dans le cas des polynômes d'André *non commutatifs*, on peut établir également l'identité

$$2D_{n+3}\mathring{U} = s\,.\,D_{n+2}\mathring{U} + \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ j \end{smallmatrix}\right] D_{j+1}\mathring{U}\,.\,D_{n+2-j}\mathring{U} + D_{n+2}\mathring{U}\,.\,t^{-1}st \qquad (n \geqslant 0) \tag{4.4}$$

qui est l'équivalent non commutatif de (4.3). Comparant (3.2) et (4.4), on voit que pour obtenir (4.4), il suffit d'établir les formules

$$D_{n+3}\mathring{U} = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ j-1 \end{smallmatrix}\right] D_{j+1}\mathring{U}\,.\,D_{n+2-j}\mathring{U} + D_{n+2}\mathring{U}\,.\,t^{-1}st \qquad (n \geqslant 0). \tag{4.5}$$

Soit $w = u_1 \ldots u_k$ un mot en les lettres s et t; le mot *retourné* $\tilde{w}$ est défini par $\tilde{w} = u_k \ldots u_1$. Les formules (4.5) se déduisent alors de (3.2) et de la *propriété de symétrie* suivante: pour tout mot w en s et t, il y a dans l'ensemble A_n des permutations d'André augmentées autant d'éléments f tels que $fU = w$ que d'éléments g tels que $gU = \tilde{w}$. Cette propriété remarquable sera démontrée dans un article ultérieur. Nous y introduirons la notion abstraite de *complexe d'André*, qui nous permettra, en outre, de construire une bijection naturelle entre l'ensemble des permutations d'André et celui des permutations alternantes.

Références

D. André, 1879, Développements de sec x et de tang x, *C.R. Acad. Sci. Paris* **88**, 965–967.

D. André, 1881, Sur les permutations alternées, *J. Math. Pures Appl.* **7**, 167–184.

T. J. Buckholtz et D. E. Knuth, 1967, Computation of tangent, Euler and Bernoulli numbers, *Math. Comp.* **21**, 663–688.

F. N. David et D. E. Barton, 1962, *Combinatorial Chance* (Griffin, London).

D. Foata and M.-P. Schützenberger, 1970, *Théorie géométrique des polynômes euleriéns* (Springer, Berlin).

W. O. Kermack et A. G. McKendrick, 1938, Some properties of points arranged on a Möbius surface, *Math. Gaz.* **22**, 66–72.

R. Mullin et G.-C. Rota, 1970, On the foundations of combinatorial theory, III: Theory of binomial enumeration, *Graph Theory and its Applications* (B. Harris, ed.; Academic Press, New York) 167–213.

N. Nielsen, 1923, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli* (Gauthier-Villars, Paris).

J. Riordan, 1958, *An Introduction to Combinatorial Analysis* (Wiley, New York).