Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Goldschmidt, Victor** (1853 – 1933)

Titel: **Über Complikation und Displikation**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1921, 12

Nachdem es sich gezeigt hatte, daß das die Entwicklung der Kristallformen beherrschende Gesetz der Komplikation sich in anderen Gebieten wiederfindet, so bei den Tönen in der Musik, bei den Farben in der Kunst, ebenso bei der Anordnung der Planeten im Weltraum und der Linien im Sonnenspektrum, so entstand die Aufgabe, das, was als allen diesen Gebieten gemeinsam in dem Komplikationsgesetz ausgedrückt ist, so zu fassen, daß es einer mathematisch-mechanischen Weiterbildung fähig ist. Der Versuch wurde in der vorliegenden Arbeit gemacht. Neben der Komplikationsfunktion zeigte sich ein mathematisches Gebilde, das als Ausdruck der Gegenoperation unter dem Namen Displikations-Funktion eingeführt wurde.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1921, S. XVIII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1921. 12. Abhandlung.

Über Complikation und Displikation

Von
VICTOR GOLDSCHMIDT
in Heidelberg

Mit 67 Textfiguren

Eingegangen am 10. Oktober 1921.

Heidelberg 1921
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1690.

Dem Andenken meines verehrten Lehrers

Leo Königsberger

gewidmet.

Der Begriff der **Complikation** in dem im Folgenden darzulegenden Sinn wurde von dem Verfasser 1897 in einer Untersuchung über Entwicklung der Krystallformen eingeführt.[1] Dort lesen wir (Seite 16):

„Die Complikation ist zu einer mathematischen Operation geworden, ebenso wie die Addition, die Potenzierung u. a., die Normalreihe zu einer mathematischen Funktion. Das Ableitungsgesetz ist in den Seite 12 gegebenen Formeln enthalten. So ist einer der Vorgänge in eine Form gebracht, die einer mathematischen Behandlung fähig ist."

Im übrigen möge auf diese Schrift verwiesen werden, sowie auf die übrigen Schriften des Verfassers, die sich mit dem Problem befassen.[2]

In einer Schrift „Über Harmonie und Complikation" (1901) wurde die Wirkung des Complikationsgesetzes in anderen Gebieten nachgewiesen, so in der Musik, in den Spektrallinien und Farben. In dieser Schrift wurde zugleich die Frage der Harmonie und Complikation als Problem der Erkenntnistheorie und der Naturphilosophie allgemeiner gefaßt. Später wurde gezeigt, daß die Planeten im Weltraum sich nach dem gleichen Gesetz um die Sonne ordnen, ebenso die Trabanten um die Planeten, ja daß die Planetoiden sich nach dem gleichen Gesetz gruppieren. Auf Grund des Complikationsgesetzes ließ sich eine musikalische Harmonielehre aufbauen und eine Farbenlehre. Bisher ist nur letztere publiziert.

---

[1] Zeitschr. f. Kryst. 1897. 28. 1—35; 414—451.

[2] Index der Krystallformen der Mineralien. Einleitung. Berlin, Springer 1886.
Chemisch-mineralogische Betrachtungen. Zeitschr. f. Kryst. 1889. 17. 25—31.
Über Harmonie und Complikation. Berlin, Springer 1901.
Über harmonische Analyse von Musikstücken. Ann. d. Nat. Philos. 1904. 3. 449—508.

Über Harmonie im Weltraum. Ann. d. Nat. Philos. 1906. 5. 51—110.

Über Harmonie im Reich der Planetoiden. Ann. d. Nat. Philos. 1912. 11. 383—392.

Über das Wesen der Krystalle. Ann. d. Nat. Philos. 1910. 9. 120—139; 368—419.

Zur Mechanik des organischen Lebens. Ann. d. Nat. Philos. 1913. 12. 138—161.

Farben in der Kunst. Heidelberg, Winter 1919.

Es ergab sich somit, daß das Gesetz der Complikation nicht den Krystallformen allein eigentümlich ist, daß es vielmehr ein allgemeines Naturgesetz ist, das die Entwicklung des Mannigfaltigen aus dem Einfachen in vielen, vielleicht in allen Gebieten der schaffenden Natur beherrscht, und es lag die Vermutung nahe, es ließe sich das Gesetz in Gestalt einer Funktion fassen, deren mathematischer Ausbau in den mechanischen und erkenntnismäßigen Ausbau aller der Gebiete eingreifen könnte, in denen das Gesetz der Complikation angetroffen wird.

Es soll nun hier ein erster Versuch gemacht werden, das Gesetz und die Operation der Complikation zu einer mathematischen Funktion auszugestalten. Zu diesem Zweck sollen Eigenschaften der Funktion in ihrer arithmetischen, algebraischen, geometrischen und mechanischen Gestalt aufgesucht und durch deren Zusammenstellung die werdende Funktion geklärt und gefestigt werden. Vielleicht finden es Mathematiker der Mühe wert, sich des Ausbaues derselben anzunehmen und dadurch der Naturwissenschaft zu Hilfe zu kommen.

Jede mathematische Operation hat ihre **Gegenoperation.** Es führt kein Weg hinauf, der nicht hinab führte. Manchmal ist der Aufstieg leichter, manchmal der Abstieg. Ebenso bringt jede Funktion ihre Gegenfunktion. Addition bringt Subtraktion mit sich, die Potenz die Wurzel. Danach ist auch für die Complikation als Operation und als Funktion eine Gegenoperation resp. Gegenfunktion aufzustellen. Letztere soll hier unter dem Namen **Displikation** eingeführt werden. Der Ausbau einer Funktion bringt jedesmal den der Gegenfunktion mit sich, indem jede Eigenschaft der Funktion ihr Korrelat in der Gegenfunktion hat.

Im Folgenden werden einige Eigenschaften der Complikations-Funktion entwickelt, von der Displikation wird einstweilen nur wenig ausgesagt. Es ist erst der Anfang der Untersuchung.

Da die meisten Leser, auch die Mathematiker und Physiker sich (leider) mit den Krystallformen wenig beschäftigt haben, sei es gestattet, hier anzudeuten, um was es sich bei der Entwicklung der Krystallformen nach dem Gesetz der Complikation handelt. Zu diesem Zweck wollen wir aus der Schrift „Über Harmonie und Complikation“ einige Stellen abdrucken. Wir lesen:

Entwicklung der Krystallformen.

Krystalle sind bei ungestörter Ausbildung von ebenen Flächen bedeckt. Jede Krystallart hat ihr Formen-System, d. h. die an ihr beobachteten Flächen stehen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang, sowohl unter sich, als mit den physikalischen Eigenschaften und dem Bau des Krystalls aus, wie wir annehmen, parallel aneinandergereihten gleichen Partikeln.

Unter den Flächen, die eine Krystallart hervorbringt, und deren Zahl ist bei manchen Arten sehr groß, sind gewisse Flächen besonders wichtig durch Häufigkeit und Größe, andere sind seltener, andere ganz selten. Mit der Häufigkeit nimmt die Größe und endlich die Sicherheit der Beobachtung ab. Danach haben die Flächen einer Krystallart eine bestimmte Rangordnung. Die wichtigsten nennen wir Hauptflächen, Primärflächen, auch Primärknoten mit Rücksicht auf eine Darstellung durch Projektion, in der sich die Flächen als Punkte (Knoten) abbilden.

Es zeigt sich nun, daß die schwächeren (abgeleiteten) Flächen sich zwischen den Hauptflächen (Primärflächen) in bestimmter Weise einordnen. Seien A B (Fig. 1) 2 Primärflächen, so bildet sich bei fortschreitender Differenzierung eine Fläche C, die die Kante A B parallelkantig unter bestimmtem Winkel abstumpft. C ist schwächer, im Rang niederer als A und B. Geht die Differenzierung weiter, so entstehen Flächen D, E, die die Kanten A C, B C abstumpfen. Die Flächen D und E sind schwächer als C. Bei noch weiterer Differenzierung bilden sich schwache Kantenabstumpfungen F G H J. Wir haben hier 3 Stadien der regelmäßigen Entwicklung:

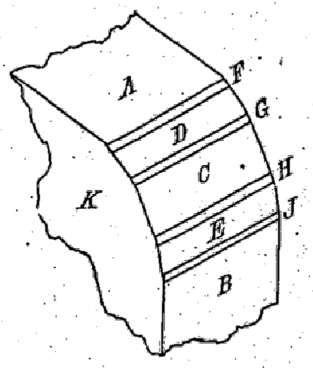


Fig. 1.

$N_0 =$	A	.	.	.	.	.	.	.	B
$N_1 =$	A	.	.	.	C	.	.	.	B
$N_2 =$	A	.	D	.	C	.	E	.	B
$N_3 =$	A	F	D	G	C	H	E	J	B

Meist geht die Entwicklung nur bis N_1, oft bis N_2, selten bis N_3 und äußerst selten darüber hinaus. Die zwischen 2 Primärflächen entwickelten (abgeleiteten) Flächen bilden mit diesen eine Zone (Primärzone), charakterisiert durch parallele Kanten. Die erste abgeleitete Fläche C, die wichtigste, nennen wir Dominante, wenn zwischen 2 Primärflächen: Primärdominante.

Die gleiche Entwicklung kann sich an der Kante zwischen 2 anderen Primärflächen vollziehen, z. B. zwischen A K oder B K

(Fig. 1). Wir sagen: es spannen sich Primärzonen AB, AK, BK zwischen den Primärflächen (Primärknoten) A, B, K. Weitere Differenzierung bringt Zonen zwischen je einer Primärfläche und einer Primärdominante, z. B. CK (Sekundärzonen); dann zwischen 2 Primärdominanten (Tertiärzonen). Die beiden Flächen, zwischen denen eine Zone sich spannt, nennen wir die Endknoten der Zone. Auch die Zonen haben ihre Rangordnung. Mit dieser Entwicklung ist ein großer Formenreichtum geschaffen, besonders, wenn die Zahl der Primärflächen groß ist und die Differenzierung in den Zonen weit geht, bis N_2 oder N_3. In jeder Zone folgt die Anordnung der Flächen einem bestimmten Zahlengesetz, das für alle Zonen aller Krystallarten das gleiche ist. Wir nennen es das Gesetz der Complikation. Es regelt den Ort resp. die Neigung der Einzelflächen, ihre Größe und Rangordnung und gestattet, nicht beobachtete Flächen als wahrscheinlich vorherzusagen, beobachtete auf ihre Wahrscheinlichkeit zu prüfen.[1]

Ersetzen der Flächen durch ihre Normalen. Auffassung der Normalen als Richtungen der Partikelkräfte. Zwischen den Flächen und den krystallbauenden parallelgestellten Teilchen (Partikel) besteht eine Beziehung. Die hypothetisch eingeführte Beziehung sei die, daß jede am Krystall mögliche Fläche senkrecht steht zu einer der Partikelkräfte. Der Partikel schreiben wir Primärkräfte zu von bestimmter Richtung und Intensität, und nehmen an, die Primärkräfte der Partikel (und zwar aller, da die Partikel parallel orientiert im Krystall sitzen) stehen senkrecht auf den Primärflächen. Wir ersetzen die Flächen durch ihre Normalen (Senkrechten zu den Flächen) aus einem Punkt innerhalb des Krystalls und haben so die Richtungen der flächenbauenden Partikelkräfte. An Stelle der Primärflächen treten Primärkräfte, an Stelle der abgeleiteten Flächen, abgeleitete Kräfte. Die Krystallmessung gibt, indem sie die Lage der Flächen ermittelt, die Richtung der Partikelkräfte. Wir können aber auch deren relative Intensität prüfen.

Deduktion der Flächen einer Zone aus den Primärkräften. Seien A, B (Fig. 2) die Primärkräfte, die senkrecht zu sich die Flächen A, B (Fig. 1) bilden, so ist genetisch das empirisch gefundene Gesetz der Entwicklung folgendes: Die Kräfte A, B zerfallen in 2 Hälften, von denen die einen a, b sich zur Resultante c

---

[1] Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 1897. **28.** S. 33—35 S. 426. 446. 1900. **33.** 441—446.

zusammenlegen. Zu c senkrecht entsteht die Fläche C. Wiederholt sich der Prozeß, so tritt $\frac{1}{2}$a mit $\frac{1}{2}$c zusammen zu einer Resultante d, ebenso $\frac{1}{2}$b und $\frac{1}{2}$c zu e. Bei nochmaliger Wiederholung des Prozesses schieben sich weitere, schwächere Resultanten zwischen ad, dc, ce, eb ein usw. So finden wir Richtung und Intensität der abgeleiteten Kräfte, dadurch Ort und Rangordnung der abgeleiteten Flächen. Die Flächen stehen senkrecht zu den Kräften, die Rangordnung entspricht der relativen Intensität.

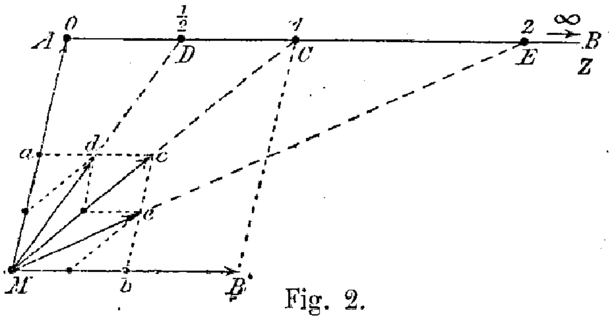


Fig. 2.

Zahlengesetz der Complikation. Wir ziehen durch A parallel B eine Gerade AZ (Fig. 2) und verlängern Ma, Md, Mc, Me, Mb bis zum Durchstich mit AZ, so sind die Richtungen Ma, Md, Mc, Me, Mb charakterisiert durch die Durchstichpunkte A, D, C, E, B. B liegt im Unendlichen. Setzen wir nun AC = MB' = 1 = der Primärkraft in Richtung MB, so ist, wie sich zeigen läßt, AD = $\frac{1}{2}$, AC = 1, AE = 2, AB = ∞. Das Durchstechen der Geraden AZ nennen wir projizieren, die Durchstichpunkte Projektionspunkte. Die Projektionspunkte charakterisieren die Lage der Flächen, ihr Ort ist gegeben durch die Zahlen $0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \infty$. Diese Zahlen nennen wir die harmonischen Zahlen, ihre Reihe harmonische Zahlenreihe und, wenn lückenlos, Normalreihe. In den Normalreihen und harmonischen Zahlen drückt sich unser Entwicklungsgesetz aus. Wir haben:

Primärflächen:	A	·	·	·	·	·	·	·	B	
$N_0 = 0$		·	·	·	·	·	·	·	∞	= Normalreihe 0.
1. Complikation:	A	·	·	·	C	·	·	·	B	
$N_1 = 0$		·	·	·	1	·	·	·	∞	= Normalreihe 1.
2. Complikation:	A	·	D	·	C	·	E	·	B	
$N_2 = 0$		·	$\frac{1}{2}$	·	1	·	2	·	∞	= Normalreihe 2.
3. Complikation:	A	F	D	G	C	H	E	J	B	
$N_3 = 0$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞	= Normalreihe 3.

usw.

Es ist klar, wie die Reihe bei einer 4., 5. Complikation aussehen würde. Aber die Natur geht, mit seltenen Ausnahmen, über N_3 nicht hinaus.

Umformung einer Reihe auf die Form $0 \cdot 1 \cdot \infty$. Die Zahlenreihe einer Zone zeigt nur dann zwischen $0 \cdot \infty$ den gesetzmäßigen Verlauf, wenn die Punkte $0 \cdot \infty$ den Endknoten des Zonenstücks zugehören. Kennen wir die Endknoten, so können wir ihnen die Zahlen $0 \cdot \infty$ beilegen und aus den Zwischenzahlen beurteilen, ob die Reihe normal oder gestört ist. Umgekehrt erkennen wir die Endknoten als solche daran, daß die Reihe normal wird, d. h. unserem Zahlengesetz folgt, wenn wir die Endknoten $0 \cdot \infty$ nennen.

Stehen nun an den Endknoten, infolge vorheriger anderweiter Annahme, nicht $0 \cdot \infty$, sondern andere Zahlen $z_1 \cdot z_2$, so können wir die Reihe in die Form $0 \cdot \infty$ bringen, indem wir statt jeder Zahl z der Reihe setzen:

$$p = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

Beispiel. Es sei eine Reihe gefunden:

$$\begin{array}{lccccc} \text{Flächen:} & A & D & C & E & B \\ z = & 1 & \tfrac{4}{3} & \tfrac{3}{2} & \tfrac{5}{3} & 2 \end{array}$$

und wir vermuten, A und B seien die Endknoten, so ist in obiger Formel $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ und wir bilden:

$$p = \frac{z-1}{2-z} = 0 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; 1 \;\; 2 \;\; \infty = N_2$$

Wir erkennen, daß nach dieser Umformung die Reihe den gesetzmäßigen Verlauf hat, und aus dem gesetzmäßigen Verlauf schließen wir umgekehrt, daß in der Tat, wie wir vermuteten, AB die Endknoten der Entwicklung sind.

Die Rangordnung der Flächen zeigt sich in der Einfachheit der Zahlen in der Reihe $0 \cdot 1 \cdot \infty$.

$$\begin{array}{rl} \text{Den höchsten Rang haben} & 0 \qquad\quad \infty \\ \text{dann} & 1 \\ \text{dann} & \tfrac{1}{2} \;\; 2 \\ \text{dann} & \tfrac{1}{3} \;\; \tfrac{2}{3} \;\; \tfrac{3}{2} \;\; 3 \\ & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \end{array}$$

Aus der Entwicklung in allen einzelnen Zonen (Primärzonen, Sekundärzonen, Tertiärzonen usw.), ausgehend von den Primärflächen, setzt sich das Formensystem einer Krystallart zusammen.

Das ist in großen Zügen ein Bild von der Entwicklung der Formen, wie wir es bei den Krystallen aller Systeme und jeder beliebigen Zusammensetzung finden.

Entstehung der Mannigfaltigkeit in der Natur durch Complikation.

Zwei Kräfte vereinigen sich im Raum durch Addition, d. h. durch Zusammenlegen nach Intensität und Richtung. Das Resultat der Addition ist eine Kraft, die Resultante oder Summe. Wie Kräfte werden Geschwindigkeiten, Beschleunigungen durch Addition vereinigt.

Die **Addition** ist eine Vereinfachung. Aus mehreren Stücken wird eins. $a + b = c$. Dadurch kommt keine Vermehrung der Einzelheiten, keine Differenzierung in die Natur. Aber neue **Richtungen** treten auf.

Anmerkung. Abgesehen von dem speziellen Fall der Addition gleich gerichteter Kräfte, bringt jede Addition eine Änderung der Richtung hervor. Umgekehrt kann jede Richtungs-Änderung als Addition aufgefaßt werden.

Es ist in Fig. 3: $A_2 = A_1 + D$.

Durch Addition von D ist die Drehung von A_1 um $\sphericalangle\ \delta$ vollzogen.

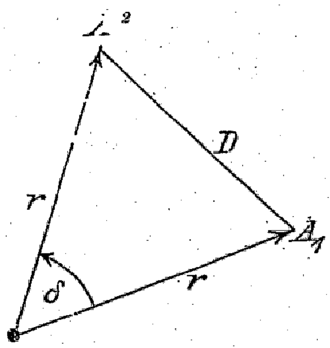


Fig. 3.

Subtraktion vermehrt die Einzelheiten auch nicht. Wir haben Größen mit gleicher und mit entgegengesetzter Richtung. Positive und negative. Subtraktion ist Addition einer negativen Größe zu einer positiven. Auch hier wird aus zwei Stücken eines.

$$a - b = c.$$

Multiplikation als Naturprozeß ist Addition von gleichen Größen. Um $2a$ zu bilden, ist a und a zu einer neuen Einheit zu vereinigen. Daher ist auch Multiplikation eine Vereinfachung. Sie vermehrt die Mannigfaltigkeit nicht. Multiplikation mit einer reellen Zahl ändert auch die Richtung nicht.

Anders die **Division.** Division ist Zerlegung (Spaltung, Zerfall) einer Einheit in eine ganze Zahl (2 oder mehr) gleicher Teile. Dadurch vermehrt sich die Zahl der Einheiten, es erhöht sich die Mannigfaltigkeit. Neue Richtung tritt aber durch Division nicht auf.

Division durch ganze Zahlen. Es fragt sich: Teilt die Natur durch komplexe Größen oder nur durch reelle, oder gar nur durch ganze Zahlen? Kann eine Kraft, eine Geschwindigkeit in $m + ni$

gleiche Teile zerfallen oder nur in m oder gar nur in 2, 3, . . . 6, . . . gleiche Teile? (Gesetz von der Rationalität der Kraftteilung).[1]

Zerfall in eine irrationale, transzendente oder imaginäre Zahl gleicher Teile können wir uns nicht vorstellen. Division durch eine Bruchzahl wäre Spaltung in eine ganze Zahl gleicher Teile und Zusammenlegen mehrerer derselben. Division und Multiplikation (Addition) zugleich. Division geschieht auch d a b e i durch eine ganze Zahl.

Anmerkung. Es bleibt zu untersuchen, ob der Zerfall in mehr als zwei gleiche Teile als e i n Vorgang anzusehen sei oder als Wiederholung des Zerfalls in Hälften. Mit anderen Worten: ob die Natur resp. unser Ausmesser der Dinge, der Verstand, anders als dichotom arbeite. Daß durch Zerfall in Hälften auch eine ungerade Zahl von Teilen entstehen könne, von denen einige unter Umständen gleich sind, werden wir unten bei der Complikation sehen.

Von unseren 4 elementaren Rechnungsarten sind nur 2 als mathematische Grund-Operationen der Natur, wie des Verstandes, anzusehen:

Addition, das ist **Zusammenlegung** von 2 (oder mehr) Einheiten (Kräften u. a.) zu einer neuen Einheit von im allgemeinen neuer Richtung.

Division, das ist **Spaltung** einer Einheit (Kraft u. a.) in 2 (oder mehr, jedenfalls eine ganze Zahl) gleiche Einheiten in der alten Richtung.

Vielleicht sind in dieser Definition für die Grundoperationen die Worte „oder mehr“ wegzulassen.

Complikation. In der Natur sehen wir erhöhte Mannigfaltigkeit in folgender Weise entstehen: Zwischen zwei Kräften A und B (Fig. 4) bildet sich eine neue C, während Reste in den Richtungen A und B übrig bleiben. Durch Wiederholung des selben Prozesses bildet sich eine neue Kraft D zwischen A und C, ebenso E zwischen B und C, während Reste in den Richtungen A B C bleiben. Aus 2 Kräften sind 3, dann 5 usw. geworden; jede von bestimmter Richtung und Intensität. Die Mannigfaltigkeit hat sich vermehrt in bezug auf Zahl und Richtung der Kräfte. Den beschriebenen Vorgang wollen wir als C o m p l i k a t i o n bezeichnen.

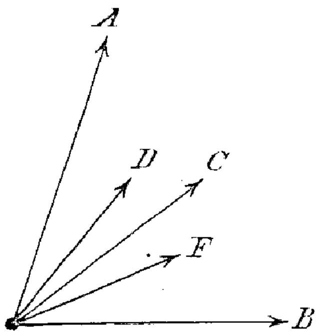


Fig. 4.

[1] Vgl. Verf. Index der Krystallformen. Berlin 1886. **1.** S. 14.

In der organischen Natur nennt man die Entwicklung vom Einfachen zum Complizierten Differenzierung. Wir könnten diesen Ausdruck auf das unorganische Gebiet übertragen. Wir wollen jedoch den Begriff spezieller fassen und mathematisch formulieren. Da aber Differenzieren in der Mathematik bereits eine feste Bedeutung hat, so wurde ein anderes Wort: Complikation gewählt.

Complikation ist Spaltung (Division) und Zusammenlegen der Teile (Addition). Durch Division allein kann die Mannigfaltigkeit in der Natur nicht entstehen (es fehlt die Bildung neuer Richtungen); durch Addition auch nicht (es fehlt die Vermehrung der Einzelkräfte); wohl aber durch beide zusammen.

Complikation im engeren Sinn. Die einfachste Teilung ist die Halbierung; die einfachste Addition die Vereinigung von je einem Teil. Wir wollen diesen wichtigsten Fall Complikation im engeren Sinn nennen und ihn voraussetzen, wenn wir im Folgenden von Complikation reden.

Complikation auf verschiedenen Gebieten.

In zwei Abhandlungen[1] habe ich versucht, aus dieser einfachen Annahme **die Entwicklung der Krystallformen** in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit abzuleiten (vgl. S. 4). Eine Transformations-Formel $p = (z - z_1) : (z_2 - z)$ gestattete, alle krystallographischen Zahlenreihen auf eine einfache, vergleichbare Form, die der Normalreihen $N = 0 \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \infty$ zu bringen. Eine Diskussion der beobachteten Zahlenreihen ließ die Anfänge der Entwicklung (Primärknoten), die Richtung der Primärkräfte (senkrecht zu den Primärflächen) bei den verschiedenen Krystallarten finden, für die Einzelflächen Rang und Wahrscheinlichkeit feststellen. Das lieferte die Unterlage für eine Kritik der Beobachtungen[2] und gestattete unter Umständen das Voraussagen noch nicht beobachteter Formen.[3] Diese Konsequenzen hat die Erfahrung bestätigt und dadurch das Gesetz für die Krystallographie gesichert.

Aber auch auf anderen Gebieten zeigte sich das Gesetz der Complikation herrschend. So bei den **Tönen unserer Musik,** wie oben gezeigt wurde. Die Transformations-Gleichung $p = (z - z_1) : (z_2 - z)$, speziell $p = (z - 1) : (2 - z)$, angewendet auf die Schwingungszahlen der harmonischen Töne, führte zu den harmonischen

[1] Zeitschr. f. Kryst. 1897. **28.** S. 1 u. 414.
[2] Ebenda S. 426.
[3] Ebenda S. 446.

Zahlen $p = 0\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ 3\ \infty$, die Einblick gewähren in den Bau der Musikstücke und die als Grundlage einer musikalischen Harmonielehre dienen können. Sie werfen Licht auf Einrichtung und Entwicklung unseres Ohrs.

Das Analoge zeigte sich bei den **Farben.** Die selbe Transformations-Gleichung $p = (z - z_1) : (z_2 - z)$, angewendet auf die Schwingungszahlen der Haupt-Spektral-Linien und, im Anschluß daran, auf die der Farben führte zu den gleichen harmonischen Zahlen $p = 0\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ 3\ \infty$, die Einblick geben in das Wesen der Spektrallinien und der Farben. Sie werfen Licht auf die Einrichtung und Entwicklung unseres Auges.

Auch andere Gebiete der Natur scheinen von dem Entwicklungsgesetz der Complikation beherrscht. Es seien hier einige flüchtige Ausblicke gestattet.

Harmonie in Geschmacks- und Geruchs-Arten besteht wahrscheinlich im Sinne der Harmonie von Tönen und Farben. Es werden Gerüche und Geschmacke in großer Mannigfaltigkeit unterschieden. Das deutet auf eine Differenzierung im Aufnahms-Organ (Nase, Zunge). Manche Gerüche oder Geschmacke sind angenehm, d. h. dem Sinnes-Organ angepaßt, andere unangenehm; aber wir haben nicht, wie für Töne und Farben, in den Schwingungszahlen und im Spektrum Mittel, um Gerüche oder Geschmacke nach Maß und Zahl zu ordnen. So fehlt der Nachweis für das Gelten des Gesetzes von Harmonie und Complikation in diesen Gebieten.

Für eine Analogie spricht der Sprachgebrauch und die Begriffsbildung, die oft das Gleichartige vereinigt und der wissenschaftlichen Untersuchung den Weg zeigt. Die Begriffe schön (dem Auge oder Ohr gefällig) und gut (dem Geschmack und Geruch zusagend) vertauschen sich. Man sagt, es schmeckt oder riecht schön, aber auch, ein Musikstück klingt gut oder ein Bild ist gut in den Farben. Man spricht von süßen Tönen und dumpfen Gerüchten, ja Geschmack ist das allgemeine Wort für den Sinn für das Schöne, Harmonische.

Möglicherweise läßt sich einmal auch für Geschmack und Geruch eine Wissenschaft in Maß und Zahl aufbauen; dann dürfte sich auch dort das Gesetz der Harmonie bewähren.

Organismen. Eine weitgehende Ähnlichkeit zeigt sich zwischen der Entwicklung der Krystallformen der freien Zone und der Septen der hexameren **Korallen.** Es ist von Interesse, das schematische Bild in ZITTELS Paläontologie[1] (Fig. 5) mit unserem Bild der freien Zone (Fig. 6) zu vergleichen.[2] Beide mögen deshalb untereinander hier abgedruckt werden. Charakteristisch ist für die vorliegende Entwicklung, wie für andere Entwicklungen in der Natur, daß sich zwischen je zwei Alte ein Junges eindrängt, entstanden durch das Zusammenwirken der beiden Alten.

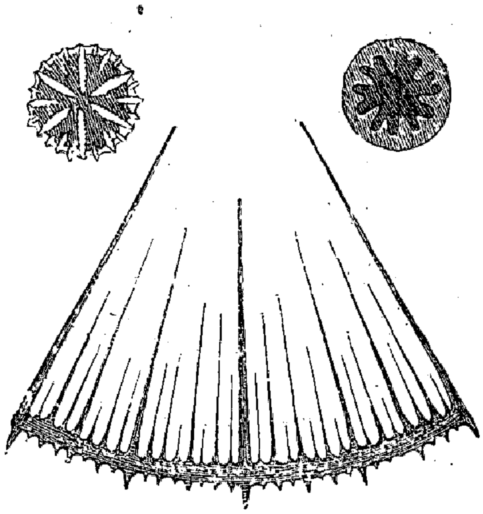


Fig. 5.
Entwicklung der Septen der hexameren Korallen.

Ein Bild der Verteilung, wie sie der Complikation entspricht, gibt der 2-, 3-, 5-zehige **Fuß** und die menschliche H a n d. Die Finger der Hand zeigen die Normalreihe $N_2 = 0\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$ und es liegt die Vermutung nahe, daß unser Gesetz deren Grund-Anlage vorgezeichnet hat. Ähnlich ist es bei den Blättern. Sollte die Verteilung der B l a t t n e r v e n auf dem gleichen Gesetz beruhen, so dürfte man sich über die Ähnlichkeit gewisser Blätter mit dem Hahnenfuß oder der Hand nicht wundern.

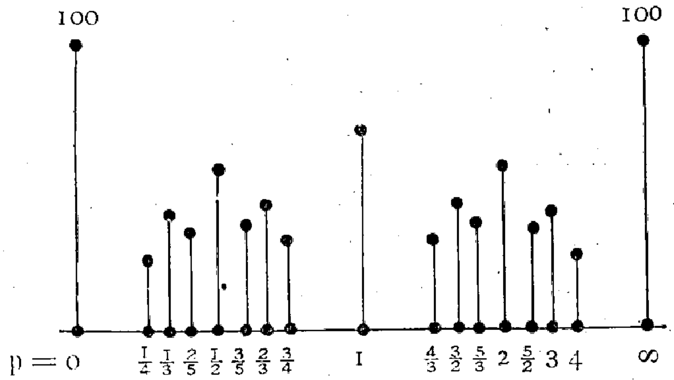


Fig. 6.
Entwicklung der Krystallformen in der freien Zone.

Einwand. Die Entwicklungsgeschichte der Tiere zeigt die 5 Finger und Zehen hervorgegangen aus Verminderung einer größeren Zahl.[3] Dieser Einwand ist vielleicht keine Widerlegung. Denn das einfache Prinzip arbeitet sich oft erst spät aus dem Gewirr der mannigfachen Anläufe durch. Die Welt ist nicht nach einfachem Plan gebaut. Sie entwickelt sich aus dem Chaos.

---

[1] 1880. 1. 215 nach MILNE EDWARDS und HAINE.

[2] Zeitschr. f. Kryst. 1897. **28.** 21.

[3] Professor L. EDINGER in Frankfurt, ein genauer Kenner der Entwicklungsgeschichte, machte mir diesen Einwand.

Beispiele: So hat sich die einfach harmonische **Musik** aus unregelmäßig gemischten Tönen roher Vorfahren herausgebildet. Ein Kind, dem man eine Geige in die Hand gibt, oder das man ans Klavier setzt, bringt wirre Töne, wenig rhythmisch, hervor und hat seine Freude daran. Erst die eingehendere Beschäftigung mit dem Instrument, Entwicklung und Erziehung, bringen ihm die Vorliebe für einfache Rhythmen, für reine und harmonische Töne, in denen sich das einfache Prinzip der musikalischen Veranlagung von Ohr und Sinn klar herausarbeitet. Hier, wie in jeder Eigenschaft, durchläuft das Kind rasch den historischen Entwicklungsgang seiner Ahnen.

Das einfache Prinzip unserer **Buchstabenschrift,** jedem charakteristischen Sprachlaut ein Zeichen zu geben, dringt allmählich durch, und bald wird es kein Volk mehr geben, das anders schreibt. Aber nirgends ist Schrift nach diesem Prinzip entstanden. Überall hat sie sich aus einem Gewirr gleichzeitiger und wechselnder Anläufe, aus einem Gemisch von Begriffs-, Silben- und Lautzeichen abgeklärt, indem sie unbewußt der Entfaltung ihres einfachen Prinzips zustrebte, das heute bei uns jedes Kind lernt und nach dem es seine eigenen Schriften erfindet.

Wir finden den altertümlich komplizierten Zustand der Schrift in den Hieroglyphen und Keilschriften. Aber auch in der Schrift der Japaner, dieses hochgebildeten modernen Volkes, finden wir ein Gemisch chinesischer Zeichen von teils begrifflicher, teils phonetischer Bedeutung mit Silbenzeichen. Ein Zeichen für viele Laute, einen Laut ausgedrückt durch vielerlei Zeichen, einen solch komplizierten Bau der Schrift, daß zum Lesen einer japanischen Zeitung die Kenntnis von mehreren Tausend Zeichen nötig ist; zum Lesen der alten und neuen Drucke und Handschriften noch viel mehr, während das einfache Prinzip, dessen Entfaltung auch diese Schrift in ihrer Entwicklung zustrebt, mit etwa 20 Zeichen auskommt.

Wir finden in der Natur nebeneinander **2 Arten der Entwicklung:**

1. **Vermehrung der Mannigfaltigkeit durch Complikation** und
2. **Verminderung der Mannigfaltigkeit** (Vereinfachung) **durch Vordrängen weniger Prinzipien und Abfallen der übrigen.**

Nach beiden Arten der Entwicklung, deren jede wir einen Fortschritt nennen, schreitet unsere Kultur vorwärts, entstehen und vergehen Völker und Tiergeschlechter, Wissenschaften, Religionen und Künste.

Complikation im Raum. Der Prozeß der Complikation vollzieht sich in einer Ebene. Zwischen 2 Kräften A B (Fig. 7) scheidet sich eine erste Zwischenkraft (Dominante) F und andere abgeleitete Kräfte aus. Derselbe Vorgang kann aber zugleich in einer anderen Ebene stattfinden, z. B. zwischen A C, und E bilden, zwischen B C, und D bilden, dann zwischen D E, E F, F D usw. Jede abgeleitete Kraft kann mit jeder ursprünglichen, wie mit jeder abgeleiteten, zu weiterer Complikation zusammenwirken. So entsteht Mannigfaltigkeit im Raum.

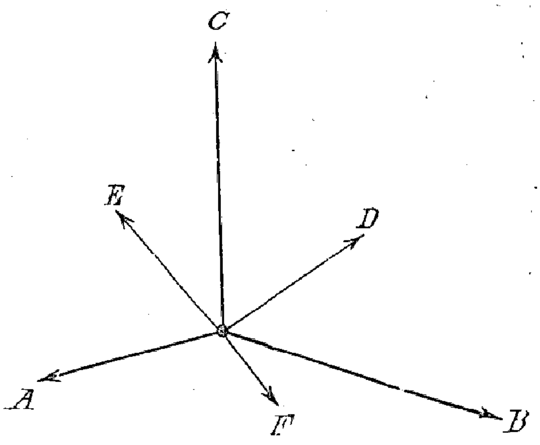


Fig. 7.

Für die Krystalle habe ich den Vorgang eingehender studiert. Dort nennen wir die Ebene eines solchen Zusammenwirkens Zonen-Ebene. Auf der Wichtigkeit des Vorganges beruht die Wichtigkeit der Zonen (vgl. S. 5).

Ursache der Complikation. Auslösung. Verfeinerung. Als Ursache der Complikation sind äußere Anregungen, Auslösungen anzusehen. Durch sie wird eine wesentliche Kraft nicht zugefügt. Die Summe ist die gleiche geblieben. In dem Maß, wie die Mannigfaltigkeit sich vermehrt, schwächen sich die Einzelwirkungen. Die Gebilde werden komplizierter und zarter. Solche Verfeinerung finden wir bei den Krystallen, den Organismen, bei unseren Sinnes-Organen, im Denken und in der gesamten Kultur.

Grenze der Complikation. Bei den Krystallen geht die Complikation über die Normalreihe $N_3 = 0 \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{2} \; \frac{2}{3} \; 1 \; \frac{3}{2} \; 2 \; 3 \; \infty$ nicht hinaus. In seltenen Fällen vielleicht bis N_4. Die Differenzierung der Töne geht, soweit ich sehen kann, bis N_3[1], die der Farben ebenso. Auch in anderen Fällen, von denen einige unten betrachtet werden sollen, scheint die Grenze N_3 selten überschritten zu werden. Durch wiederholte Anwendung des gleichen einfachen Prozesses schafft die Natur eine ungeheuere Mannigfaltigkeit.

Der algebraische Ausdruck der Complikation ist das arithmetische Mittel. Räumliches Mittel. Sind die Primärkräfte A und B, so ist die durch Complikation entstehende Zwischenkraft

[1] Bei besonders fein entwickelten oder ausgebildeten Ohren vielleicht bis N_4.

die Vereinigung von $\frac{1}{2}A$ mit $\frac{1}{2}B$, also $\frac{1}{2}(A+B)$, das arithmetische Mittel, gleichwie die Bildung der Resultante aus A und B die Summe $A+B$ ist, mit Berücksichtigung der Richtung. Wir können dies das arithmetische Mittel im Raum oder das räumliche Mittel nennen.

Bei den Krystallen finden wir die Entwicklung vom Einfachen zum Complizierten hervorgebracht durch Einschiebung nach obigem Gesetz. Bestätigt sich dasselbe in den anderen Gebieten, so haben wir in der Bildung der Complikation, des räumlichen Mittels, ein Gesetz der Entwicklung, des Werdens, des Schaffens.

Geist und Empfindung. Es wurde geschlossen, daß unser Geist und unsere Empfindung nach dem gleichen Gesetz der Complikation arbeite, wie unsere Sinnes-Organe, das Denk-Organ nach demselben Gesetz eingerichtet und entwickelt sei, indem unser Sinn Harmonie der Töne und Farben als Genuß empfindet, wir aber als Genuß definierten eine Belebung der Funktionen unserer Organe, entsprechend deren Einrichtung und Fähigkeit.

Ein Beweis dafür, daß der Geist nach diesem Gesetz arbeitet, könnte darin bestehen, daß sich zeigen ließe, daß er sich **nach diesem Gesetz schaffend** betätigt. Dies scheint in der Tat der Fall. Wir wollen den Nachweis an zwei Beispielen versuchen: an der formellen Kunst und an den Zahlensystemen. In beiden Fällen trägt der Geist seine Eigenart in die Natur hinaus, gestaltet und ordnet dieselbe nach seinem Ebenbild.

Complikation in der formellen Kunst.

Der Genuß des Schönen, die Freude an der Kunst, wie an der Schönheit der Natur, besteht darin, daß wir in den Erscheinungen unser Wesen (Denken und Empfinden) wiederfinden. Durch Zufügung des mit der Tätigkeit unserer Sinne, unseres Denkens und Empfindens gleichartig Wirkenden wird unsere Lebenstätigkeit erhöht. Wir werden sympathisch, d. h. im Sinn unserer eigenen Funktionen, angeregt, belebt. Darin besteht der Genuß.

In der formellen Kunst wird das als schön empfunden (als gefällig, harmonisch), was der Einrichtung unseres Auges und des die Gesichts-Eindrücke verarbeitenden Geistes angepaßt ist. Dieser Einrichtung entsprechen die Gesetze des Schönen in der Form. Sie entwickeln und verfeinern sich mit ihr.

Ist es nun wahr, daß das Auge sowohl als der die Gesichts-Eindrücke verarbeitende Geist sich beide nach dem Gesetz der Complikation entwickelt haben, so dürfen wir erwarten, daß dies Gesetz sich in der absichtlichen Anordnung der Dinge zu einem gefälligen (harmonischen) Ganzen ausspricht.

Versuch. Unmittelbar tritt dies Gesetz hervor bei Gegenständen verschiedener Form und Größe, die z. B. auf einem Wandbrett oder Kamin in einer Reihe gefällig geordnet sind. Das Bedürfnis nach Harmonie gibt ihnen bestimmte Folge nach Größe und Abständen. Es ist erst befriedigt, wenn diese Ordnung hergestellt ist. In der Regel wird die von Einem hergestellte Anordnung auch den Anderen gefallen. Ja es werden Viele unabhängig für dieselben Gegenstände die gleiche Anordnung treffen.

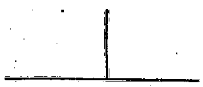


Fig. 8.

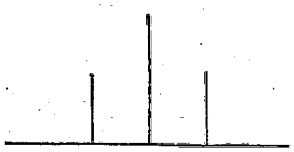


Fig. 9.

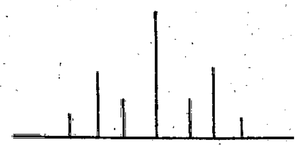


Fig. 10.

Fig. 8—10 geben Beispiele solcher Anordnung. Man vergleiche sie mit Fig. 5 und 6. Es ist wieder die Einschiebung eines Kleineren zwischen zwei Größere. Die horizontalen freien Stücke (hier der Unterlage angehörend) sind dabei wesentlich. Der Grund, warum das Gesetz sich gerade in diesem Fall so deutlich zeigt, ist die Einfachheit der Bedingungen: die Anordnung in einer Ebene (entsprechend der freien Zone in der Krystallographie) und die Gleichgültigkeit der Gegenstände. Der Versuch läßt sich leicht anstellen. Noch unbefangener ist die Prüfung an schon durch Andere aufgestellten Gegenständen.

Symmetrie und Harmonie. Symmetrie ist ein spezieller Fall der Harmonie. Sie entspricht der Entwicklung aus zwei gleichen Primärkräften (Fig. 6, 8—10). Es gibt aber auch harmonische Anordnung ohne Symmetrie. Setzen wir in obigem Beispiel eine große Figur außer der Mitte, so ist damit die harmonische Ordnung der übrigen vorgezeichnet (Fig. 11). Diese unsymmetrische Anordnung entspricht in der Krystallographie der freien Entwicklung zwischen zwei ungleichen Primärkräften. Man vergleiche Fig. 11 mit 12, letztere gibt das Bild krystallographischer Entwicklung zwischen zwei Primärkräften von der ungleichen Intensität 100 und 25.[1]

[1] Vgl. Zeitschr. f. Kryst. 1897. **28.** S. 22.

Symmetrische und unsymmetrische Harmonie der Formen. Jede der beiden ist wesentlich für große Gebiete der Kunst. Die symmetrische Harmonie beherrscht die Renaissance, die unsymmetrische das Rokoko und die japanische Kunst. Die unsymmetrische Harmonie gestattet dem schaffenden Künstler freiere Entfaltung durch willkürliches Einsetzen exzentrischer Massen und harmonischen Ausgleich. Symmetrische Harmonie trägt in sich einen hohen Grad

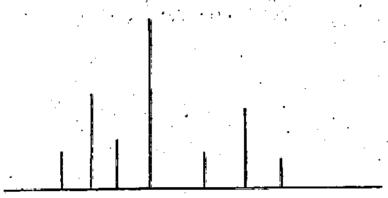


Fig. 11.

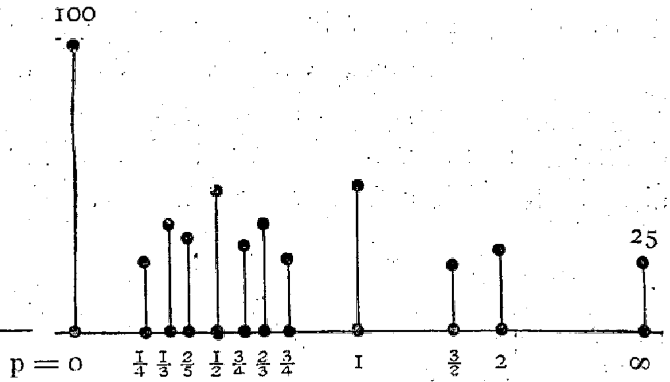


Fig. 12.

der Beschränkung. Sie ist daher leichter zu handhaben, wird aber leicht handwerksmäßig. Die unsymmetrische Harmonie bedarf einer strengeren Selbstzucht des schaffenden Künstlers, um von Anderen als Harmonie empfunden zu werden. Sie ist reizvoller, aber unruhiger. Eine Ausartung der Kunst besteht in der Verwechslung der schwerer verständlichen unsymmetrischen Harmonie mit der Regellosigkeit.

Complikation in den Zahlensystemen.

Die Zahlensytene zeigen, wie der menschliche Geist Einheiten zu Gruppen zusammenlegt, umgekehrt, Mengen in untergeordnete Einheiten spaltet. Indem er die Untereinheiten zusammenfaßt, zugleich anschaut, sieht er die höhere Einheit mit ihrer vorgezeichneten Teilung (Gliederung) als Ganzes. Das gibt den Begriff der Zahl.

Gruppierung ist Zusammenlegen (Verknüpfen) mehrerer Einheiten zu einem Ganzen, einer höheren Einheit, wobei die ursprünglichen (niederen) Einheiten noch ihre Selbständigkeit bewahren.

Gliederung ist eine Teilung, bei der der Zusammenhang der Teile nicht zerrissen ist, so daß sie zusammen noch ein Ganzes bilden.

Gliederung ist die absteigende, Gruppierung die aufsteigende Operation. Das Produkt beider ist das gleiche, ein gegliedertes Ganze.

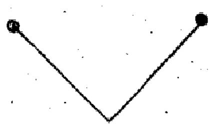
Beispiel. Wir haben in der Zahl 5 ein Ganzes und zugleich die 5 Einheiten, die die Zahl ausmachen. Ein Bild der Zahl 5 ist die Hand. Sie gliedert sich in 5 Finger. Die Gruppe der 5 Finger bildet die Hand.

Dem Bedürfnis der Teilung und Zusammenlegung (Gliederung, Gruppierung) zugleich mit dem Bedürfnis der Anschauung der Gruppen entsprechen die Zahlen und die Zahlensysteme mit ihren praktischen Formen, den Maß-, Gewicht- und Münzsystemen.

Zahlensystem ist eine Gliederung der in Abständen von je 1 fortschreitenden Zahlenreihe in Gruppen.

In der Art, wie die Gruppierung vollzogen wird, die Zahlen und Zahlensysteme gebildet werden, haben wir ein Bild, wie der Geist seine Grund-Operationen, Teilung (Division) und Zusammenlegung (Addition) vollzieht. Diese vereinigte Teilung und Zusammenlegung ist aber nichts anderes als der Prozeß der Complikation. Wir dürfen also erwarten, auch hier das Gesetz der Complikation zu finden.

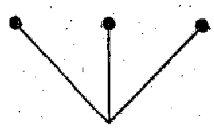
Als Grundoperation der Zahlenbildung erscheint die Bildung von Gruppen $2 \cdot 3 \cdot 5$. Wir haben aber für $2 \cdot 3 \cdot 5$ eine unmittelbare Anschauung des gegliederten Ganzen in den Formen (Fig. 13 bis 15):



2

N_0

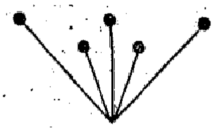
Fig. 13.



3

N_1

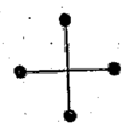
Fig. 14.



5

N_2

Fig. 15.



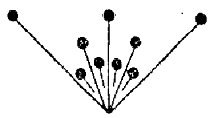
4

2×2

Fig. 16.

Das ist gerade die Anschauungs-Form der Complikation und der Normalreihen N_0 N_1 N_2. 4 ist uns nicht unmittelbar anschaulich, sondern als Doppelhalbierung oder als $2+2$ oder gar $5-1$ (Römisch IV), ebenso 6 durch den Doppelprozeß $5+1$ (Römisch VI); 7 durch den Doppelprozeß $5+2$ (Römisch VII). Die Zahl 8 stellt sich dar als $5 + 3$ (Römisch VIII) oder $10 - 2$, nicht durch ein einheitliches Anschauungsbild.[1]

Der nächste Schritt nach 5 in fortschreitender Complikation wäre die Anschauung von $9 = N_3$ als gegliedertes Ganzes (Fig. 17).

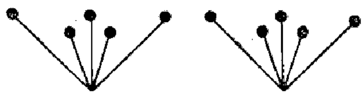


9

N_3

Fig. 17.

Diese Anschauung ist uns noch möglich, wenn auch nicht so leicht als die von $2 \cdot 3 \cdot 5$ und ohne weitgehende praktische Bedeutung.[2] Hier sind wir aber an der Grenze der Zahlen-Anschauung. Dieselbe Grenze der Entwicklung (bis N_2 oder N_3) fanden wir bei den harmonischen Tönen und den Farben. Bei den Krystallformen wurde selten N_4 erreicht.



10

$5 + 5 = 2 \times 5$

Fig. 18.

Die Anschaulichkeit der **10** (Fig. 18) liegt in der Vereinigung von 2 Fünfern. Es ist der Prozeß N_0 und N_2 zugleich. Zum Festsetzen von 10 als Grundlage der Gliederung unseres Zahlensystems wirkten mehrere Umstände zusammen.

1. Die 2 fünffingerigen Hände.
2. Unsere Auffassungsgabe für zweiseitige Symmetrie.
3. Die Grenze der Anschaulichkeit. Unter 10 dominiert die Anschauung der Zahlen, darüber die Reflexion (Rechnung). Bis 10 gehen die kleinen Zahlen, bis 5 die ganz kleinen, über 10 die großen. Nach 10 beginnt das große Einmaleins.[3]

Vierer-, Zehner-, Zwölfer-, Sechziger-System. Alle diese Systeme sind bei uns im Gebrauch für Maß, Gewicht und Geld, und waren es noch mehr, bis vor kurzem das Zehner-System durch gelehrten Beschluß und Verordnung vielen Anwendungen der übrigen ein Ende machte. Sie alle sind gebildet durch die Zahlen $2 \cdot 3 \cdot 5$.

Das **Vierer-System** hat sein Feld da, wo das größere Ganze die Einheit ist, aus der kleinere Einheiten von untergeordneter Bedeutung durch **Teilung** gebildet werden. Als anschauliche Teilung

[1] Spezielle Untersuchungen über dies Gebiet will ich in einer anderen bereits vollendeten Abhandlung „Über Entstehung unserer Ziffern" vorlegen.

[2] Man vergleiche übrigens Fig. 20, S. 23.

[3] Ein Tierchen mit mehr als 10 Füßen nennen wir „Tausendfüßler". Es „regt 100 Gelenke zugleich", d. h. eine Zahl weit über die Grenze der Anschauung.

finden wir stets **Halbierung,** wenn nötig wiederholt. Zur anschaulichen **Zusammenfassung** mehrerer Einheiten dagegen, zu einer höheren Einheit dienen die anderen Systeme. Wir hatten beim Getreide:

1 Malter = 4 Simmer à 4 Kumpf à 4 Gescheit à 4 Mäßchen.

Der Malter war das Hauptmaß, die anderen seine Teile. Man teilte:

1 Kreuzer in 4 Pfennig.

Aufwärts (zusammenfassend) bildete man Dreier (Groschen), Sechser, Gulden nach dem Zwölfer- und Sechziger-System.

Beim Gewicht teilten wir:

1 Pfund in 32 Lot à 4 Quentchen.

Das Pfund war das Hauptgewicht. Aufwärts bildete man nach dem Dezimal-System den Zentner.

Ist uns beim Einkauf ein Pfund Kaffee oder Zucker zu viel, so nehmen wir ein Halbes oder ein Viertel oder gar ein halbes Viertel, nicht ein Drittel. Dagegen kaufen wir 6 Paar Strümpfe oder ein Dutzend Taschentücher, wo das Paar oder das Stück die Einheit bildet.

Zeit-Einteilung. Das Jahr teilt sich in Semester und Quartale und baut sich aus 12 Monaten auf. Der Monat zerfällt in 4 Wochen und baut sich aus 30 Tagen auf. Wegen Rücksicht auf Sonne und Mond klappt die Sache nicht und wird künstlich ausgeglichen. Aus der Teilung des Monats in Viertel kommt die ungewöhnliche, der Complikation nicht entsprechende Zahl der 7 Wochentage. Der Tag spaltet sich in 2 Hälften, Tag und Nacht, der helle Tag in Vor- und Nachmittag. Darin zählt man 12 Stunden. Die weitere Einteilung in 60 Minuten à 60 Sekunden ist eine scheinbare Ausnahme.

Kreisteilung, Zifferblatt, Maßstäbe. Zur Erklärung dieser scheinbaren Ausnahme möge folgendes dienen. Die Teilung der Stunde in 60 Minuten à 60 Sekunden ist von den Astronomen (künstlich) auf die Zeit übertragen vom Zeitmesser, der Uhr und den Teilkreisen, die den Gang der Gestirne verfolgen. Die Einteilung in 2 × 12 Stunden à 60 Minuten à 60 Sekunden verstehen, heißt die Entstehung der Kreisteilung verstehen.

Der Kreis spaltet sich in Halbkreise, Quadranten, Oktanten durch Halbierung, aber auch in Sextanten. Letztere Teilung (sie ist in der Tat eine Teilung, nicht ein Aufbauen) verdankt ihre Wichtigkeit der Eigentümlichkeit des Radius, der Zirkelöffnung oder des gespannten Fadens, mit dem man den Kreis zieht, diesen in 6 Teile zu teilen. Das macht, daß man die Kreisteilung in Sextanten leichter ausführt, als irgendeine andere. Man teilt nicht in Drittel und halbiert, wohl aber in Sextanten und halbiert. Das gibt die 12 (24) Stunden des Zifferblattes, den Kreis, in dem die Stunden angeschaut und gezählt werden. Dem Anschauen und Zählen aber entspricht das Zwölfer-System. So befriedigt das Zifferblatt die Bedürfnisse der Teilung und der Gruppierung zugleich.

Die Teilung des Stundenkreises in 60 Minuten, des Minutenkreises in 60 Sekunden dürfte entstanden sein durch Teilung in Sextanten und Halbierung; jedes Zwölftel ausgefüllt durch die anschauliche Gruppe von 5 Minuten. Das Zifferblatt unserer Uhren zeigt auch das.

Im Leben der einfachsten Anschauungen rechnet man nach halben und viertel Stunden, und nicht jeder, der mit diesen Begriffen operiert, weiß, daß man in der Stunde 60 Minuten zählt.

Die Kreisteilung in $360^0 = 6 \times 60^0$ erklärt sich wohl durch gelehrte Übertragung der für den Vollkreis naturgemäßen 60 Teile auf den Sextanten und durch das Bedürfnis des anschaulich gruppierenden Zählens.

Interessant für unsere Untersuchung ist das Bild eines **Maßstabes** für Längenmessung (Zählung von Centimetern, Millimetern . . .) oder für Winkelmessung (Zählung von Stunden, Graden, Minuten . . . . am Teilkreis). Die Ähnlichkeit des Bildes (Fig. 19) mit dem der Complikation (Fig. 6) ist auffallend. Es unterscheidet sich von letzterem durch die Gleichheit der Abstände und dadurch, daß dort die Linien die differenzierten Objekte darstellen, hier deren Grenzen. Wir sehen im Maßstab, was die Anschauung in die Längen hineingetragen hat, um sie übersichtlich, verständlich zu machen, dem Geist zu assimilieren.

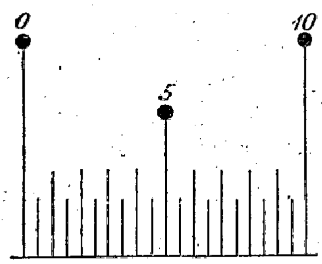


Fig. 19.

„Sie teilt die fließend immer gleiche Reihe
Harmonisch ab, daß sie sich rhythmisch regt.“

Sie tritt uns entgegen im Bild des Complikationsgesetzes, verändert durch das Bedürfnis (sekundären Einfluß) des speziellen Falles.

Kompaß. Windrose. Der Kreis der Seeleute, der Schiffs-Kompaß, zeigt in seiner Einteilung das reine Vierer-System. Die

4 Kardinalpunkte der Windrose geben die Himmelsrichtungen Osten, Westen, Norden, Süden. Diese sind entstanden durch zweimalige Halbierung in Morgen und Abend, Mittag und Mitternacht. Jeder Quadrant zerfällt durch wiederholte Halbierung in 8 Striche. Sein Bild (Fig. 20) ist mehrfach interessant. Es zeigt, außer der fortgesetzten Halbierung, die Einschiebung der schwächeren (unwichtigeren) jüngeren Richtung im Sinn und mit der Rangordnung der Complikation.

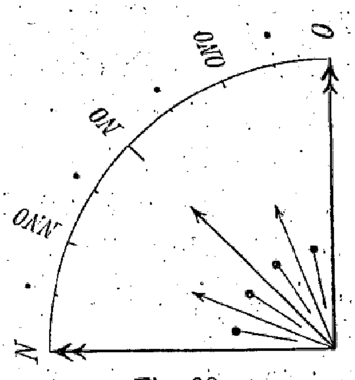


Fig. 20.

Es bildete sich zwischen Nord und Ost zunächst die erste, wichtigste Abgeleitete (Dominante) Nordost, dann, durch erneute Complikation, N N O und O N O und endlich die 4 übrigen untergeordneten Striche. Merkwürdigerweise geht die Complikation im Quadranten wieder bis zur Normalreihe N_3, wie bei den Tönen (S. 11), Farben (S. 12), Zahlbegriffen (S. 20) und Krystallen (S. 5 und 11). Complikation bis N_3 ist die Grenze unserer Anschauung.

Das **Zwölfer-System** trägt zugleich dem Bedürfnis der Teilung in Hälften Rechnung und dem anschaulichen Zusammenfassen bis zur Complikation $N_1 = 3$, der wichtigsten von allen. Es ist recht das System für den kleinen Markt. Es gibt unsere liebsten Zahlenverhältnisse: das Paar, den Dreier, den Sechser, das Dutzend und das halbe Dutzend und die 12 Stunden der Uhr.

Das **Sechziger-System** befriedigt das Bedürfnis nach Teilung in Hälften und nach anschaulichem Zusammenfassen bis zur Complikation $N_2 = 5$. Es ist der konsequente Ausbau des Zwölfer-Systems durch Zutreten der 5. Es ist aber weniger einfach und weniger populär, indem es an die Anschauung höhere Anforderungen stellt.

Wir haben den Monat zu 30 Tagen, die Stunde zu 60 Minuten à 60 Sekunden, wir hatten den Gulden zu 60 Kreuzern, den Taler zu 30 Silbergroschen. Das System ist aber nicht so einfach, dem kleinen Markt nicht so angemessen und nicht so populär als das Zwölfer-System. Es ist künstlich durch Gelehrte und Gesetzgeber eingeführt als Verbesserung des Zwölfer- und Vierer-Systems.

Wir erinnern uns an den Ersatz der 32 Lot im Pfund durch 30, der 24 guten Groschen im preußischen Taler durch 30 Silbergroschen (in Sachsen Neugroschen). Aber die Silbergroschen waren nie populär; das Volk hielt zäh an dem Rechnen mit guten Groschen fest, nachdem die Münze längst aus dem Verkehr verschwunden war.

Das Sechziger-System ist zugleich ein Kompromiß zwischen dem Zehner- und Zwölfer-System. Aber es wird, wie so oft die Mittelparteien, durch die extremen aufgerieben.

Das **Zehner-System** enthält die Complikation bis $N_2 = 5$ und gestattet einmalige Halbierung. Es schreitet so rasch aufwärts, als es die Anschauung gestattet. $10 = 2 \times 5$ läßt sich durch unmittelbare Anschauung erfassen (Fig. 18, S. 20), 12 nicht mehr leicht, noch weniger 30. Die neue Einheit (10) ist für Anschauung und Demonstration begünstigt durch die 2 Hände. Das Zehner-System hat für die Buchrechnung die anderen Systeme besiegt. Aber **ihm fehlt die 3** und die Möglichkeit der wiederholten Halbierung. Es wird deshalb immer künstlich bleiben und aus den Gebieten der Anschauung und des kleinen Marktes das Vierer- und Zwölfer-System nie verdrängen, wenn sich auch alle Gesetze und offiziellen Maße auf seine Seite stellen.

Münzen. Solange die Münzen in Geschäftsbüchern auftreten, herrscht die 10. Anders da, wo sie aus der Tasche auf den Markt gehen. Hier äußert sich das Bedürfnis der Anschauung für Ware und Münze im **Verlangen nach der 3.**

Beispiel 1. Wir hatten in Süddeutschland als Einheit für den Kleinverkehr den Kreuzer, für den Großverkehr den Gulden. 3 Kreuzer bildeten einen Groschen, 2 Groschen einen Sechser und 10 Sechser einen Gulden. Kreuzer, Groschen, Sechser und Gulden waren selbständige Einheiten, für die Münzen geprägt wurden. Die Spaltung des Guldens lieferte das Halbguldenstück. Dagegen ist der Sechser nicht als $\frac{1}{10}$ Gulden anzusehen, sondern als Gruppe $2 \times 3 = 6$ Kreuzer. Das sagt der Name. Die Zahl 4 spielt in der Gruppierung keine Rolle. Dagegen erscheint sie bei Teilung des Kreuzers in 4 Pfennige.

Anmerkung. Wir finden hier und sonst oft die Gruppierung 3 zur höheren Einheit der 2 vorgezogen. Das mag in folgendem seinen Grund haben. Die 2 Einheiten sind (wenn nicht zu groß) so übersichtlich, daß die Bildung einer neuen Einheit aus ihnen noch nicht Bedürfnis ist. Für 2 ist die Vereinigung so leicht, die Spaltung so leicht, daß die Gruppe 2 unter vielen Verhältnissen keine Festigkeit gewinnt.

Die Kommission der französischen Revolution brachte eine Reform vom grünen Tisch, die strenge Durchführung des Dezimal-

Systems. Die Anwendung dieses Systems brachte in Frankreich den Franc = 100 Centimes und bei der einheitlichen Neuordnung des deutschen Münzwesens die Mark als Einheit. Die Mark ist nicht der Anschauung gemäß aufgebaut aus kleineren Werten, sondern künstlich gespalten in 100 Pfennige, die einzeln kein Leben haben. Eine natürliche Strömung mit dem Bedürfnis des Aufbaues und Anschauens hat das Zehnpfennigstück zur Einheit des Kleinverkehrs gemacht. Es ist mit anderem Namen der alte Groschen, der englische Penny. 5 Pfennig erscheint als ein halber Groschen, 50 Pfennig als eine halbe Mark. Die große Zahl im Namen 10-, 20-, 50-Pfennigstück deckt sich nicht mit der Anschauung der einfachen, doppelten, halben Verkehrs-Einheit. Auch fehlt ein 3-Groschenstück (three pence). Der gleiche Übelstand führte im französischen Kleinverkehr zur Erhaltung der Rechnung nach Sous. Von größeren Münzen hat das Gesetz 1 · 2 · 5 Markstücke gemacht. Der Zufall hat das 3-Markstück, den Taler, erhalten und der Wunsch des Verkehrs hält zäh an ihm fest. Nach einem 4 · 6 · 7 · 8 · 9 Markstück ist kein Verlangen. Bei den Gold-Münzen, dem 10 und 20 Markstück, dem 50-, 100-Markschein, die dem Großverkehr dienen, liegt ein Bedürfnis der 3 nicht vor.

Beispiel 2. In England ist die Münze des Kleinverkehrs der Penny. Aus 12 Pence baut sich der Shilling auf, und zwar in Stücken von 1 · 2 · 3 · 6 Pence. Sixpence ist zugleich ein halber Shilling. Die Münze des Großverkehrs dagegen, das Pfund, hat 20 Shilling. Es zirkulieren Noten zu 5, 10 Pfund, nicht zu 3 Pfund. Das Bedürfnis der 3 liegt hier nicht vor. Die Einteilung des Shilling in 12 Pence wird von der Rechnung des Großkaufmanns als eine Last empfunden, der Aufbau des Shillings aus Penny, Threepence, Sixpence vom Kleinverkehr als eine Wohltat. Das englische Münzsystem entspricht, wie die früheren deutschen, einer Entwicklung, in der die Bedürfnisse des Großhandels (Rechnung und Buchführung), die des Kleinhandels (Anschauung) verdrängen. Das zähe Festhalten der Engländer an der Rücksicht auf das nicht erloschene alte Bedürfnis ist naturgemäß, wenn auch vielleicht auf die Dauer nicht haltbar.

Altersfolge der Ziffern. Es läßt sich zeigen (und ich will das an anderer Stelle darlegen), daß die Ziffern eine bestimmte Altersfolge der Entstehung haben. Nämlich 1 · 2 · 3 · 5; 4 · 6; 10; 9 · 7 · 8. Die Folge entspricht der fortschreitenden Complikation, wie wir sie oben bei den Zahlensystemen kennen gelernt haben.

Die Bildung der Begriffe und Zeichen für die höheren Zahlen ist eine Wiederholung derer zwischen 1 und 10. Es bildete sich 10 · 20 · 30 · · · analog 1 · 2 · 3 · · · Wir sehen das deutlich in Worten und Ziffern, z. B.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C
C	CC	CCC	[CD]	D	DC	DCC	DCCC	[CM]	M

Anschauung und Rechnung. Die Bildung der Ziffern von 1—10 ist beherrscht von der Anschauung und entwickelt sich mit dieser (Complikation). Die der höheren Ziffern dagegen ist beherrscht von der schon höher entwickelten Rechenkunst.[1] Sie überträgt das zwischen 1 und 10 Erworbene. Je höher wir steigen, desto mehr herrscht die Rechnung, verliert sich die Anschauung.

Wir sehen das z. B. bei obigen römischen Ziffern. IV=V—I ist anschaulicher als IIII und wird vorgezogen. Bei den analog gebildeten höheren Ziffern ist XXXX mindestens ebenso häufig als XL; CD aber tritt gegen CCCC entschieden zurück. Über M geht das römische Ziffernsystem praktisch zu Bruch. Es wird verdrängt durch ein anderes, das sogenannte arabische.

Bei den arabischen Ziffern 1—10 ist die Anschaulichkeit verloren gegangen. Sie haben dieselbe besessen, wie ich glaube zeigen zu können. Dagegen haben sie ein schönes Verfahren der periodischen Weiterbildung ausgebildet (mit Stellenwert und Null), das sich sogar absteigend für die Werte von 1 bis 0 weiter entwickeln ließ (Dezimalbrüche). In dem Maß, wie die Rechnung das Übergewicht erlangte über die mit Anschauung verknüpfte Auffassung der Zahlen, haben die arabischen Ziffern die römischen verdrängt. Sie hätten sie aus allen Positionen verdrängt, wäre ihnen in den Grenzen 1—10 die ursprüngliche Anschaulichkeit erhalten geblieben.

So ist der Kampf noch nicht beendet. Da, wo unmittelbare Anschauung erwünscht ist, bei den kleinen Zahlen I · II · III, dann V und X, auch IV und VI finden die römischen Ziffern noch immer ihre Verehrer und Anwender.[2] II ist anschaulicher als 2, XX anschaulicher als 20. Dagegen ist MDCCI nicht anschaulicher als 1701 und zugleich für die Rechnung schlecht. Die Anwendung der

[1] Elf und Zwölf, XI · XII gehören noch zu den anschaulichen Zahlen. Daher ihre alten, eigenartigen Namen.

[2] Sie werden z. B. auf den Zifferblättern unserer Uhren bevorzugt.

hohen römischen Zahlen, z. B. auf Denkmälern, ist nur noch ein scholastisches Kuriosum.

Anmerkung. Den gleichen Kampf zwischen Anschauung und Rechnung in der Reihe der Zahlzeichen finden wir bei den Japanern. Dort haben wir z. B. bei Numerierung der Bände eines Werkes:

Wenn es 2 Bände hat:

上 下 das ist oben, unten.

Wenn es 3 Bände hat:

上 中 下 das ist oben, mitten, unten.

Wenn es viele Bände hat:

一 二 三 四 五 · · · = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · · ·

oder: 壹 二 三 四 五. · · · = eins · 2 · 3 · 4 · 5 · · ·

Statt der Ziffern gebrauchte chinesische Wortzeichen finden sich bei den Japanern nur für 1 · 2 · 3 und 10.[1]

Brüche und Dezimalbrüche. Ein ähnlicher Verdrängungs-Prozeß vollzieht sich bei den Brüchen. Da, wo die Anschauung ausreicht, bei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, auch $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ behalten die Brüche ihr Recht. Werden aber die Verhältnisse kompliziert, so daß die Anschaulichkeit verloren geht, überwiegt die Buchrechnung und macht die Anschauung überflüssig, so weichen die Brüche den Dezimalbrüchen. Das Durchdringen des Dezimalsystems für Maß, Gewicht und Geld hat die komplizierten Brüche praktisch fast bedeutungslos gemacht.

Wir wollen auf diese Dinge hier nicht näher eingehen. Es kam nur darauf an, zu zeigen, daß auch in der Zahlen-Auffassung, in den Ziffern, den Münzen, Maß- und Gewichts-Systemen, die Eigenart der menschlichen Anschauung sich widerspiegelt, die beherrscht ist durch die Entwicklung vom Einfachen zum Mannigfaltigen nach dem Gesetz der Complikation. Die Anschauung aber ist eine Funktion des Geistes.

Wir wollen nun daran gehen, die Complikation und dann die Displikation in mathematischer Form darzulegen und deren Ausbau zur Funktion zu versuchen.

[1] Vgl. Lange, Einführung in die japanische Schrift, Berlin 1896, S. 140 u. 141.

Complikationsreihen.

Komplexe Reihe. Wir bilden zwischen den Endgliedern $0+1i$ und $1+0i$, wobei $i=\sqrt{-1}$, neue Reihen (z) durch Einschiebung der Summe zwischen je 2 benachbarte Glieder. So erhalten wir die Einschiebungen (E):

$E_0 =$	0+1i																1+0i
$E_1 =$									1+1i								
$E_2 =$					1+2i								2+1i				
$E_3 =$			1+3i				2+3i				3+2i				3+1i		
$E_4 =$		1+4i		2+5i		3+5i		3+4i		4+3i		5+3i		5+2i		4+1i	

usw.

Nach diesen Einschiebungen erhalten wir die Reihen:

$J_0 =$	0+1i																1+0i
$J_1 =$	0+1i								1+1i								1+0i
$J_2 =$	0+1i				1+2i				1+1i				2+1i				1+0i
$J_3 =$	0+1i		1+3i		1+2i		2+3i		1+1i		3+2i		2+1i		3+1i		1+0i
$J_4 =$	0+1i	1+4i	1+3i	2+5i	1+2i	3+5i	2+3i	3+4i	1+1i	4+3i	3+2i	5+3i	2+1i	5+2i	3+1i	4+1i	1+0i

usw.

Die Reihen lassen sich ins Unendliche fortsetzen.

Komponenten, Grundmaße (Elemente). Das allgemeine Glied der Reihen E und J hat die Form $a+bi$. Wir bezeichnen a und bi als die beiden **Komponenten.** a hat das Einheitsmaß 1, b das Einheitsmaß i. 1 und i wollen wir als Grundmaße (Elemente) bezeichnen. Führen wir statt 1 und i andere Elemente A und B ein, so bekommt jedes Glied die Gestalt:

$$aA+bB$$

Dabei können A und B irgendwelche komplexe Größen sein.

Die Koeffizienten in der Reihe bleiben die gleichen, welches auch die Elemente A und B sein mögen. A und B sind Konstante der Reihe, a und b Variable. Handelt es sich also um gesetzmäßige Beziehungen zwischen den Koeffizienten (a.b), d. h. um Gesetze, die unabhängig sind von den Elementen (A.B), so entstehen Reihen, in denen die Elemente (A.B) fehlen. Auch das Additionszeichen + kann zum Zweck der Abkürzung entfallen. Wir bekommen dann die folgenden aus Zahlenpaaren (a b) bestehenden Koeffizientenreihen.

Koeffizientenreihen (a b).

$J'_0 =$	01																10
$J'_1 =$	01								11								10
$J'_2 =$	01				12				11				21				10
$J'_3 =$	01		13		12		23		11		32		21		31		10
$J'_4 =$	01	14	13	25	12	35	23	34	11	43	32	53	21	52	31	41	10

usw.

Analogie und Beispiel. Solche Reihen aus Doppelzahlen sind in der Krystallographie üblich. Die Doppelzahlen dienen zur Bezeichnung der Flächenarten. Man nennt sie **Symbole** (p q). Die beiden Zahlen des Symbols p und q nennt man die Symbolzahlen oder Indices. Zu den Symbolzahlen (p q) gehören Maßeinheiten (Elemente) $p_0 q_0$, in bestimmten, für die Krystallart feststehenden Richtungen. Zur Bestimmung der Richtung der Flächennormalen im Raum ist eine dritte Symbolzahl r und ein zugehöriges Element r_0 nötig. Dadurch werden die Elemente p q r zu Vektoren, d. h. Längen, die mit Richtung begabt sind. Die Richtungen bezeichnen wir mit P Q R. Es hat sich ferner in der Krystallographie die Hypothese bewährt, daß die Flächennormalen als Partikelkräfte aufzufassen sind und daß die Größen $p_0 q_0 r_0$ ein Maß für die Intensität dieser Kräfte geben.

Für jede Krystallart lassen sich die Richtungen P Q R durch ihre gegenseitigen Winkel ($\lambda \mu \nu$) ausdrücken und durch Messung festlegen. Die Krystallographie hat diese Aufgabe für sämtliche bekannte Krystallarten besorgt.

Vektoren. Zur Bestimmung der Richtung und Intensität jeder Flächennormale müssen wir das Symbol dreizahlig machen (p q r) und jede Zahl mit ihrer Maßeinheit (Element) $p_0 q_0 r_0$ multiplizieren. So erhalten wir für jede Flächennormale ein Symbol:

$$p p_0 \cdot q q_0 \cdot r r_0$$

Soll dabei die Richtung berücksichtigt sein, so müssen die Winkel ($\lambda \mu \nu$) eingeführt werden, oder, was dasselbe ist, wir fassen p q r als Vektoren auf, als mit Richtung begabte Größen, d. h. als raum-komplexe Größen von der Form

$$p = a + \alpha i; \quad q = b + \beta k; \quad r = c + \gamma l$$

Das ist die allgemeine Form. Für spezielle Aufgaben können wir es uns einfacher machen.

Solange es sich nicht um Kräfte handelt, sondern nur um Richtungen oder um Kraftverhältnisse, so genügt, statt der Werte p q r und $p_0 q_0 r_0$ deren Verhältnis $p : q : r$ resp. $p_0 : q_0 : r_0$. Das heißt: wir können $r = 1$, $r_0 = 1$ setzen. Das genügt für die ganze Krystallographie der Formen. Handelt es sich dagegen um physikalische Aufgaben, z. B. Kohäsion, Partikel-Mechanik u. a., so muß auch für r_0 der Wert bestimmt und eingeführt werden. Diese Aufgaben sind seitens der Krystallographen noch nicht gelöst, kaum in Angriff genommen. Beim Ausbau der Krystallographie in dieser

Richtung dürfte unsere Complikations- und Displikations-Funktion berufen sein, helfend einzugreifen. Da aber die Partikelphysik der festen Körper zu den Fundamentalaufgaben der Krystallographie gehört, so hat diese Wissenschaft das größte Interesse an dem Ausbau dieser Funktion, die sich im Gebiet der Krystallographie zuerst gezeigt hat.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn es sich nicht um die Berechnung von Einzelrichtungen und Kräften handelt, sondern um die Beziehungen solcher Richtungen zueinander innerhalb des Formensystems derselben Krystallart. Dann sind die Werte p und q variabel, die Elemente $p_0\, q_0\, r_0\, \lambda\, \mu\, \nu$ dagegen konstant und sie entfallen bei Berechnung der Proportion. Da genügen die zweiziffrigen Symbole p q. Diese sind, wie die krystallographische Erfahrung lehrt, einfache rationale Zahlen, und zwar sind es die selben Zahlen, die das Gesetz der Complikation angibt.

Harmonische Normalreihen (N). Harmonische Zahlen (p). Handelt es sich nur um die Vorgänge in der Ebene zwischen zwei Richtungen A und B (in der Krystallographie nennen wir das eine Zone, Ebene) und kommt es nur auf das Verhältnis der Anteile a und b, der Zwischenvektoren $z = aA + bB$ an, die ja zu einer Resultante (z) in der Zwischenrichtung zusammentreten, so brauchen wir a und b nicht einzeln, sondern nur in dem Verhältnis

$$p = \frac{a}{b}$$

Diese Werte ($p = \frac{a}{b}$) nennen wir **harmonische Zahlen** und die Reihen aus p-Werten **harmonische Zahlreihen.** Lückenlose Reihen harmonischer Zahlen gemäß dem Entwicklungsgesetz der Complikation nennen wir harmonische Normalreihen. Sie ergeben sich unmittelbar aus den Complikationsreihen J resp. J'. Sie finden sich in der Krystallographie in jedem ungestört entwickelten (freien) Zonenstück.

Die harmonischen Normalreihen ergeben sich unmittelbar aus den Reihen J'. Wir wollen sie anschreiben:

$N_0 =$	0																∞
$N_1 =$	0								1								∞
$N_2 =$	0				$\frac{1}{2}$				1				2				∞
$N_3 =$	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		2		3		∞
$N_4 =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	∞

usw.

Den Zahlen nach ist die Reihe identisch mit der in der Mathematik bekannten BROCOTschen Reihe.[1] Das Bildungsgesetz der BROCOTschen Reihe lautet:

Endglieder: $\frac{0}{1} \cdots \frac{1}{0}$; Einschiebung neuer Glieder durch Addition von Zähler und Nenner der Nachbaren. Nach diesem Bildungsgesetz erhält die Reihe folgende Gestalt:

$$\begin{array}{llllllllll}
\mathbf{Br}_0: & \frac{0}{1} & . & . & . & . & . & . & . & \frac{1}{0} \\
\mathbf{Br}_1: & \frac{0}{1} & . & . & . & \frac{1}{1} & . & . & . & \frac{1}{0} \\
\mathbf{Br}_2: & \frac{0}{1} & . & \frac{1}{2} & . & \frac{1}{1} & . & \frac{2}{1} & . & \frac{1}{0} \\
\mathbf{Br}_3: & \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{0}
\end{array}$$

usw.

Wir kommen somit auf zwei verschiedenen Bildungswegen zu der gleichen Reihe. Es ist zu zeigen, warum dies so ist.

Beweis. Bezeichnen wir in den E-Reihen (S. 28) zwei Nachbarglieder mit $a_1 A + b_1 B$ und $a_2 A + b_2 B$, so haben wir:

$$p_1 = \frac{a_1}{b_1}; \quad p_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

und somit das eingeschobene Glied:

$$p = (a_1 + a_2) A + (b_1 + b_2) B$$

Danach ist:

$$p = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

Das selbe erhalten wir, wenn wir in p_1 und p_2 Zähler und Nenner addieren.

Die Form **N** (Normalreihe) ist von allen Formen, in denen sich das Complikationsgesetz zeigt, die wichtigste, weil die einfachste. Besonders wichtig sind die Reihen $\mathbf{N}_1\ \mathbf{N}_2\ \mathbf{N}_3$.

In der Reihe $\mathbf{N}_3$ fehlen in der Natur oft die Zahlen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$. Das hat seine naturwissenschaftlichen und mathematischen Gründe auf die ich hier nicht eingehen möchte. Entfallen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$ aus N_3, so haben wir die Reihe

$$0 \ \tfrac{1}{3} \ \tfrac{1}{2} \ 1 \ 2 \ 3 \ \infty$$

Die Reihe besteht dann nur aus den Zahlen 0 1 2 3 und deren Reziproken. Ebenso besteht

$N_2 = 0 \ \frac{1}{2} \ 1 \ 2 \ \infty$ aus 0 1 2 und seinen Reziproken,
$N_1 = 0 \ 1 \ \infty$ aus 0 1 und seinen Reziproken,
$N_0 = 0 \ \infty$ aus 0 und seiner Reziproken.

So finden wir die Reihen bei den Farben in der Kunst, bei den Spektrallinien und bei den Tönen der harmonischen Musik und es bleibt zu prüfen, ob hier ein anderes Gesetz vorliegt, das sich bei N_3 von dem Complikationsgesetz abspaltet. Auf diese Frage

[1] Vgl. E. CAHEN, Théorie des Nombres, Paris 1900, S. 333.

wollen wir hier nicht eingehen. Nur einiges möge hervorgehoben werden.

Zusammenlaufen zweier Gesetze auf eine bestimmte Strecke ist nichts Ungewöhnliches. Die Reihen N_1 und N_2 zeigen z. B. ein Fortschreiten nach Potenzen von 2. Nach diesem Gesetze hätte aber N_3 die Reihe

$$0 \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad \infty$$

bringen müssen. Dies Gesetz schien bei den Planetenorten vorzuliegen und führte auf die Titiussche Regel, die beim Neptun versagte und von dem Complikationsgesetz abgelöst wurde.

In der Krystallographie führte das Gesetz des Fortschreitens nach Potenzen von 2 zu den von Mohs aufgestellten Entwicklungsreihen und zu seinen Flächensymbolen. Auch hier lief das Gesetz bis zu der Reihe N_2 mit dem Complikationsgesetz zusammen, versagte bei N_3 und wurde von letzterem Gesetz abgelöst.

In beiden Fällen können wir sagen, das Gesetz der Potenzen von 2 ist in erster Annäherung richtig.

Combinationsreihen. Nehmen wir die Reihe

$$N_3 = 0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{2}{3} \quad 1 \quad \tfrac{3}{2} \quad 2 \quad 3 \quad \infty$$

vollständig (d. h. mit Einbeziehung von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$), so sind in der Reihe keine anderen Zahlen als 0 1 2 3 und deren Verhältnisse in allen möglichen Combinationen. Wir haben die Verhältnisse:

$$\text{Comb.}\,(0\,1\,2\,3) = N_3 = \left\{\begin{array}{cccccccc} \frac{0}{0} & \frac{0}{1} & \frac{0}{2} & \frac{0}{3} & = 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & = \infty & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & = \infty & 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{0} & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & = \infty & 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right\} = \begin{array}{c}\text{Combinationen} \\ \text{der Verhältnisse} \\ 0\,1\,2\,3\end{array}$$

Wir haben ebenso

$$\text{Comb.}\,(0\,1\,2) = N_2 = \left\{\begin{array}{cccccc} \frac{0}{0} & \frac{0}{1} & \frac{0}{2} & = 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & = \infty & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & = \infty & 2 & 1 \end{array}\right\} = \begin{array}{c}\text{Combination der Verhältnisse: } 0\,1\,2 \text{ (das innere} \\ \text{Quadrat von } N_3\text{).}\end{array}$$

Sowie

$$\text{Comb.}\,(0\,1) = N_1 = \left\{\begin{array}{cccc} \frac{0}{0} & \frac{0}{1} & = 1 & 0 \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & = \infty & 1 \end{array}\right\} = \begin{array}{c}\text{Combination der Verhältnisse: } 0\,1 \text{ (das innere Quadrat} \\ \text{von } N_2\text{).}\end{array}$$

Wir wollen das Gebilde noch für die Combination der Verhältnisse 0 1 2 3 4 anschreiben. Da haben wir:

$$\text{Comb. } (0\,1\,2\,3\,4) = \text{ oder Comb. } (4) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} \frac{0}{0} & \frac{0}{1} & \frac{0}{2} & \frac{0}{3} & \frac{0}{4} & = & (?)\,0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & = & \infty & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & = & \infty & 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{0} & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & = & \infty & 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{0} & \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & = & \infty & 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right\}$$

Das gibt die Reihe

$$(\text{Comb. } 4) = 0\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{3}{4}\ 1\ \tfrac{4}{3}\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3\ 4\ \infty$$

Sie scheidet sich von der Normalreihe

$$N_1 = 0\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{5}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{5}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{3}{4}\ 1\ \tfrac{4}{3}\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{5}{3}\ 2\ \tfrac{5}{2}\ 3\ 4\ \infty$$

Die Reihen Comb. (n) und N_n laufen bis N_3 zusammen. Erst da stellt sich die Verzweigung ein und nun trennen sich die Wege. Beide Reihen decken sich also in dem Gebiet, das naturwissenschaftlich in Frage kommt. Das ist wieder eine merkwürdige Eigenschaft.

Combinations-Funktion. In ihrer quadratischen Anordnung bietet diese Combinationsreihe ein interessantes Zahlenspiel. Sie zeigt merkwürdige Eigenschaften in den Diagonalen, in den Horizontalen und Vertikalen. Jede vorhergehende Reihe steckt in der folgenden als Quadrat. Die neuen Glieder der folgenden Reihe umhüllen das alte Quadrat wie eine Schale. Durch Anlegen solcher Schalen kann man weiterbilden.

Wir können diese Reihen und ihr quadratisches Gegenbild als eine zahlentheoretische Funktion ansehen und Combinations-Funktion nennen. Einiges möge über diese Gebilde ausgesagt werden:

Durch die Zahl n und das Bildungsgesetz sind alle Glieder der Funktion festgelegt. Die Zahlengruppe ist eine Funktion von n. Wir können schreiben F (n) oder Comb. (n).

Es dürfte eine hübsche Aufgabe sein, diese Gebilde zahlentheoretisch zu verfolgen und zu prüfen, welche Bedeutung die Funktion hat. Vielleicht ist die Gruppe von den Zahlentheoretikern bereits ausgebaut.

Combinations-Funktion (Comb. n). Ableitung durch Umschalung. Wir bemerken Folgendes:

Jede Schale bildet ein Knie mit einem vertikalen und einem horizontalen Schenkel. Beide Schenkel sind symmetrisch (reziprok) und treffen sich im Symmetriepunkt 1 (Dominante). Die Zahl der Stufe $0 = \frac{0}{0}$ ist unbestimmt. Sie kann $= 0$ sein (als zur ersten Horizontalreihe gehörig), $= \infty$ (als zur ersten Vertikalreihe gehörig).

$= 1$ (als zur Diagonale gehörig). Das entspricht dem mathematisch unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$.

Das **Bildungsgesetz** jeder Schale ist klar. Wir haben:

Comb. 4

Schale:	0	I	II	III	IV
Stufe 0:	(?)	0	0	0	0
Stufe 1:	∞	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Stufe 2:	∞	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
Stufe 3:	∞	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
Stufe 4:	∞	4	2	$\frac{4}{3}$	1

Allgemein: **Schale n:**

					0
					$\frac{1}{n}$
					$\frac{2}{n}$
					.
					.
					$\frac{n-1}{n}$
∞	$\frac{n}{1}$	$\frac{n}{2}$	.	. $\frac{n}{n-1}$	1

Beispielsweise: **Schale IV:**

				$\frac{0}{4}$
				$\frac{1}{4}$
				$\frac{2}{4}$
				$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{0}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	1

Manche Zahlen treten mehrfach auf $0\ 1\ \infty$: n mal. Diese haben weitaus die größte Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. $\frac{1}{2}$ und 2 erscheinen bis Comb. 4 zweimal. Alle anderen Zahlen nur einmal. Das gibt den Zahlen $\frac{1}{2}$ und 2 ein höheres Gewicht, einen höheren Rang. Aber sie stehen hinter den Grundzahlen $(0 \cdot \infty)$ und der Dominante (1) weit zurück. Die anderen Zahlen wiederholen sich auch bei höheren Combinationen selten. Wiederholungen treten auf, wenn Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Faktor haben.

Wir sehen: die wichtigsten Zahlen bilden die Normalreihe:

$$N_1 = 0\ 1\ \infty$$

Mit Zutritt der nächst wichtigen haben wir:

$$N_2 = 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$$

Aufgabe. Es ist zu prüfen, ob nicht in der **Musik** statt der Normalreihen $N_1\ N_2\ N_3\ N_4$ die Combinationsreihen **Comb. 1 Comb. 2 Comb. 3 Comb. 4** zu setzen sind. Manches spricht dafür. Nun sind aber bei Stufe 3 beide gleich. Bei Stufe 4 ist Comb. 4 in N_4 enthalten. Auch sind in der Musik bei Stufe 4 (Chromatik) die Verhältnisse für die komplizierten Größen so unklar, daß eine Entscheidung sich nur durch eingehendes Studium der höchstdifferenzierten Melodik erzielen ließe. Dafür fehlen derzeit die Unterlagen. Es wäre die Aufgabe, solche zu beschaffen. Es ist aber auch dann zweifelhaft, ob eine Entscheidung zu gewinnen ist, denn die hochdifferenzierten, einander naheliegenden Töne fließen ineinander.

Hoffnung auf Lösung dieses wichtigen Problems gibt die japanische Musik. Ein anderer Weg wäre der synthetische Ausbau der Melodik auf Grund beider Annahmen. Untersuchungen des Verfassers über Musiklehre führen an diese Aufgabe heran. Ihre

Entscheidung ist für die praktische Musik nicht wichtig, wenigstens nicht für unsere europäische Musik, bei der in der Chromatik durch Temperierung und Modulation die feineren Unterschiede der hochdifferenzierten Töne verwischt sind. Der zarte Blütenstaub der verfeinerten Melodik ist durch Überwucherung der Harmonik abgestreift. Bei einer Rückkehr zur verfeinerten Melodik (zum Heil unserer Musik) könnte obige Aufgabe wichtig und lösbar werden. — Diese Andeutungen werden erst verständlich nach Darlegung der Studien des Verfassers über Musiklehre, speziell über Melodik.

Bis zur Entscheidung der Frage bleiben wir bei der Auffassung, daß in der Musik die Normalreihen N_1 N_2 N_3 N_4 herrschen. Ob wohl auch in anderen Gebieten der schaffenden Natur und Kunst die **Combinations-Funktion** statt der **Complikations-Funktion** eintritt? Es möge hier nur auf die Frage und die Möglichkeit hingewiesen werden. Das nächstliegende Gebiet wäre die Farbenlehre. Dort dürfte eine Entscheidung nicht zu gewinnen sein. Es dürfte da an der nötigen Präzision fehlen. Aussichtsvoll ist dagegen das Gebiet der Spektrallinien. Diese zeigen die nötige Mannigfaltigkeit und Schärfe.

Noch ein paar Worte über **Töne** und **Farben.** Im Schema der Combinations-Funktion geben sie folgende Bilder:

Tonkunst

Schale:	0	I	II	III	IV
—	(?)	0	0	0	0
Dominantik	∞	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Anatonik	∞	2	1	$(\frac{2}{3})$	$\frac{1}{2}$
Diatonik	∞	3	$(\frac{3}{2})$	1	$\frac{3}{4}$
Chromatik	∞	4	2	$\frac{4}{3}$	1

Farbenkunst

Schale:	0	I	II	III	IV
—	(?)	0	0	0	0
Primitive Stufe	∞	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Vorblüte	∞	2	1	$(\frac{2}{3})$	$\frac{1}{2}$
Hochblüte	∞	3	$(\frac{3}{2})$	1	$\frac{3}{4}$
Überfeinerung	∞	4	2	$\frac{4}{3}$	1

Die Bilder sind erst nach eingehenden Darlegungen über Musik und Farben verständlich. Hier sollen sie nichts weiter sein, als ein Hinweis.

Wir können das Zusammenlaufen und die Verzweigung (Gabelung) beider Funktionen so andeuten:

N_0	N_1	N_2	N_3		N_4	N_5	N_n	N_∞
gleich	gleich	gleich	gleich	)(	ungleich	ungleich	ungleich	ungleich
Comb (0)	**Comb** (1)	**Comb** (2)	**Comb** (3)		**Comb** (4)	**Comb** (5)	**Comb** (n)	**Comb** (∞)

Comb (4) gibt die Zahlenreihe: $0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \cdot\ \frac{1}{2}\ \cdot\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ 1\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{2}\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3\ 4\ \infty$

N_4 dagegen: $0\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ 1\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{3}\ 2\ \frac{5}{2}\ 3\ 4\ \infty$

Wir sehen, die Combinationsreihe **Comb** (4) ist in der Normalreihe $\mathbf{N}_4$ enthalten, nur fehlen einige Glieder, und zwar gerade die naturwissenschaftlich unwichtigen.

Beispiel. In der Musiklehre wird in der Chromatik der modernen Musik die Reihe $\mathbf{N}_3$ = Comb (3) überschritten und es ist zu prüfen, ob der neue Schritt zu Comb (4) oder zu N_4 führt. Nach meinen Erfahrungen läßt sich das praktisch schwerlich entscheiden. (Die Temperierung ist das Hindernis, dazu die schwebenden Akkorde und die Modulation mit ihren Schiebungen.) Doch ist die prinzipielle Entscheidung von Interesse. Vieles spricht für Comb (4).

Ich betrachte den Fall der Complikation theoretisch und genetisch als den bedeutsameren. Doch ist es nötig, alle Wege auszubauen. Solange die Scheidung nicht vollzogen ist, wollen wir nur von Complikation reden.

Rang und Wahrscheinlichkeit. Die Reihen $\mathbf{N}_0\,\mathbf{N}_1\,\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_3\,\mathbf{N}_4 \cdots \mathbf{N}_n$ (resp. ihre Gegenbilder in der Natur) sind ungleich nach Häufigkeit und Wichtigkeit. Wir sagen: sie sind ungleich im Rang. Je kleiner n ist, desto höher ist der Rang. Die wichtigste Reihe nach $\mathbf{N}_0$ ist $\mathbf{N}_1$. Weit zurück steht $\mathbf{N}_2$, noch viel weiter $\mathbf{N}_3$. Die Reihe $\mathbf{N}_4$ ist bereits so schwach, daß sie zu den größten Seltenheiten gehört. Von $\mathbf{N}_5$ und darüber sind Häufigkeit und Wichtigkeit so gering, daß Reihen $\mathbf{N}_5$ praktisch nicht existieren.

Ebenso haben die einzelnen Zahlen jeder Reihe resp. deren Gegenwerte in der Natur ihre Rangordnung unter sich. Den höchsten Rang haben die Grenzwerte $0 \cdot \infty$. Dann folgt 1, dann $\frac{1}{2}2$, dann $\frac{1}{3}3$, dann $\frac{2}{3}\frac{3}{2}$, dann $\frac{1}{4}$ usw. **Der Rang der Zahl ist um so höher, je einfacher die Zahl ist, je näher dem Bildungsanfang.** Die Wahrscheinlichkeit und damit die Häufigkeit und Wichtigkeit, sinkt rapid mit fortschreitender Complikation. Das Maß der Abnahme ließe sich vielleicht nach den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Formel bringen.

Adam Riese hat ganz recht, wenn er auf das Schild seines berühmten Rechenbüchleins das Zahlenmotto setzte: $2 \times 2 = 4$. Das ist das Fundamentale in der Rechenkunst. $3 \times 7 = 21$ ist ebenso wahr, aber es steht an Häufigkeit und Wichtigkeit weit zurück hinter $2 \times 2 = 4$. Auf ein Buch über Harmonie ließe sich als Zahlenmotto setzen: $\mathbf{N}_2 = 0\,\frac{1}{2}\,1\,2\,\infty$.

Die Normalreihen N sind das Kriterium für die Herrschaft des Complikationsgesetzes in einem Gebiet. Sie zeigen den Weg zum Eindringen in das Gebiet. Aber sie liefern zugleich ein Mittel, das Gebiet wissenschaftlich auszubauen.

Sind die Anfangswerte **A** und **B** konstant oder bekannt, so sind die harmonischen Zahlen der Reihe die Variabeln oder die Unbekannten. Es bleibt zu untersuchen, bis zu welcher Stufe die Complikation geht und welche Rolle die einzelnen Glieder der Reihe spielen, so die verschiedenen Farben in der Kunst, oder verschiedene Flächen in der Zone der Krystallformen.

Ist dagegen in dem Gebiet das Complikationsgesetz nachgewiesen und es geht an den geometrischen oder mechanischen Ausbau, so erscheinen die Grundwerte **A** und **B** als die Unbekannten. Die Zahlenreihe und die Art des Auftretens lassen erkennen, wo die Anfangswerte sitzen und welcher Art sie sind. Dann setzt die Aufgabe ein, die Grundwerte auszuwerten. Sie sind andere in den Oktaven der Musik, andere bei den Spektrallinien und Farben, wieder andere bei den Planeten im Weltraum und bei den Krystallflächen der Zonen.

Nachdem die Grenzwerte **A** und **B** bestimmt sind, setzt die mechanische Behandlung des Problems ein, in jedem Gebiet mit anderen Bedingungen und anderen Hilfskonstanten. Jetzt ist es nötig, die Complikationsfunktion und ihre Gegenfunktion, die Displikationsfunktion, mathematisch ausgebaut, als Werkzeug in der Hand zu haben. Denn nun wird das Problem kompliziert und bedarf der Zusammenfassung, wie sie die mathematischen Funktionen und Operationen bieten, um die Massen zu bezwingen.

Der mechanischen Behandlung muß die deskriptive vorhergehen, der quantitativen Analyse und Synthese die qualitative. Es sind aber die harmonischen Reihen $N_1\,N_2\,N_3\cdots$ der Schlüssel zum Erschließen großer Wissensgebiete.

Analogon. Der Stein fällt zur Erde, der Apfel vom Baum. Messung und Experiment lassen die Wirkung des Gravitationsgesetzes erkennen. Das Gesetz wurde in mathematische Form gebracht. Der Gang der Planeten zeigte dasselbe Gesetz, ebenso die Ballistik. Nachdem diese erkannt war, setzte der Ausbau der Mechanik dieser und verwandter Prozesse ein. Man bediente sich dazu des ganzen, herrlichen, mathematischen Apparats der Differenzialrechnung und der analytischen Geometrie.

Die Partikel der festen Körper, der Krystalle, beschreiben ihre Bahn als Wärmebewegung im Inneren des Krystalls und an seinen Grenzen. Es ist zunächst zu prüfen, ob auch hier das Gravitationsgesetz wirksam ist, oder ein verwandtes Gesetz. Nachdem dies erkannt sein wird, brauchen wir wieder den mathematischen Apparat, um die Aufgabe zu bezwingen, die komplizierter ist;

als die vom Laufe der Planeten, von der fliegenden Kugel und dem fallenden Stein.

Ob und wie weit das Complikationsgesetz und die Complikations-Funktion in der Partikel-Mechanik der Krystalle eingreift, wird sich zeigen, wenn wir erst das Instrument hergerichtet und gelernt haben, mit ihm umzugehen und wenn wir die mechanische Aufgabe ernstlich angreifen.

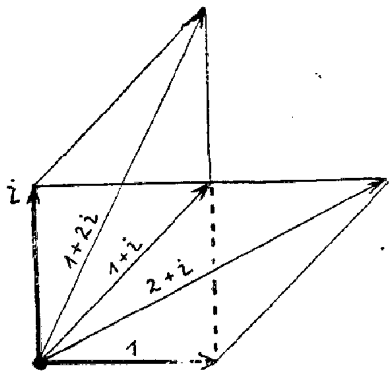


Fig. 21.

Geometrische Deutung der Einschiebung. 1 + i (Fig. 21) ist die räumliche Summe von 1 und i. Die Diagonale im Parallelogramm 1 + 2 i ist die räumliche Summe von i und 1 + i usw.

Das eingeschobene Glied ist jedesmal die räumliche Summe, d. h. die Summe nach Länge und Richtung der beiden ursprünglichen Glieder.

Mechanische Deutung. Sind 1 und i das Maß für gerichtete Kräfte (Vektoren), so haben wir in der Reihe die Addition von Kräften durch Einschiebung.

Abgeleitete Glieder. Wir nennen die eingeschobenen Glieder abgeleitete und sagen: Es bildet sich nach diesem Gesetz jedesmal ein abgeleitetes Glied durch Einschiebung. Die Einschiebung erfolgt durch Addition.

Harmonische Reihe = Complikationsreihe. Wir nennen die Reihen **N** harmonische Reihen oder Complikationsreihen, weil sich in ihnen die Gesetze der Harmonie und Complikation ausdrücken.

Abbildung der Complikationsreihen durch Projektion.

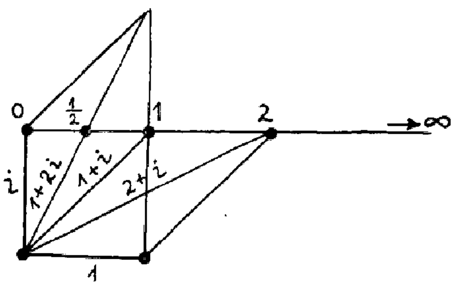


Fig. 22.

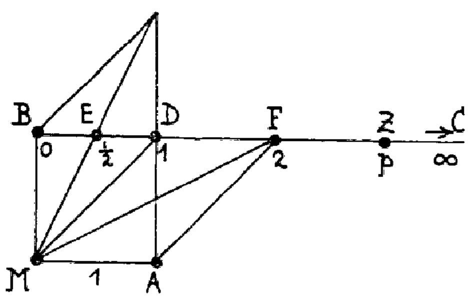


Fig. 23.

Ziehen wir mit M A eine Parallele durch B (Fig. 23), so erscheinen auf B C die harmonischen Zahlen (p) als Abstände von B.

Es ist allgemein (Fig. 23)

$$BZ = p.$$

Beispiel. Für das harmonische Vektorenbündel $\mathbf{N}_2$ haben wir in Fig. 23 die Distanzen

$$p = 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty.$$

Der Anfang der Zählung (0) liegt in B, die Maßeinheit ist: $BD = MA = 1$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß für einen Vektor $a + bi$

$$BZ = p = \frac{a}{b}$$

ist. Wir haben (Fig. 24):

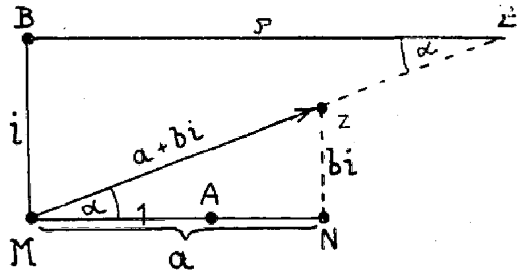


Fig. 24.

$$BZ = p;\ MA = 1;\ MB = i;\ MZ = a + bi$$
$$MN = a;\ Nz = bi;\ \sphericalangle BZM = NMz = \alpha.$$

Danach:

$$\left.\begin{array}{l} BZ : BM = p : i \ \ = \operatorname{ctg} \alpha \\ MN : Nz \ = a : bi = \operatorname{ctg} \alpha \end{array}\right\} \frac{p}{i} = \frac{a}{bi};\ p = \frac{a}{b}$$

q. e. d.

Die Punktreihe B D E F $\cdot\ \cdot$ C (Fig. 23) gibt in ihren Abständen von $B = 0$ eine geometrische Darstellung (Abbildung, Projektion) der harmonischen Normalreihe N_2. In ihr sind alle niederen Normalreihen: $N_0\, N_1$ enthalten, nämlich:

$$N_0 : p = 0 \cdot \cdot \cdot \infty$$
$$N_1 : p = 0 \cdot 1 \cdot \infty$$
$$N_2 : p = 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$$

Diese Art der Abbildung der harmonischen Zahlen ist für die Physik wertvoll. Besonders auch für die Krystallographie. Dort nennen wir sie Projektion. Es sind da die Vektoren MA und MB Flächennormalen der Primärflächen, MD, ME, MF sind Normale der abgeleiteten Flächen. Die Ebene A M B C nennen wir dort eine Zonenebene. Die Flächennormalen der Krystalle betrachten wir zugleich als Richtungen der Partikel-Attraktionskräfte.

Erweiterung. Mit den Reihen **E** läßt sich operieren, wie sonst mit komplexen Größen. $p = \frac{a}{b}$ ist das Verhältnis vom reellen zum imaginären Teil. Geometrisch stehen die Richtungen MA und MB (1 und i) aufeinander senkrecht.

Für die räumliche Addition kann der Winkel BMA auch ein anderer sein als ein rechter. Es seien die Anfangsrichtungen $MA = 1$, $MB = k = \alpha + \beta i$ (Fig. 25). Dann haben wir für die Einschiebung die Reihen:

$$\begin{array}{lccccc}
J_0 = & 0 + k & \cdot & \cdot & \cdot & 1 + 0k \\
J_1 = & 0 + k & \cdot & 1 + k & \cdot & 1 + 0k \\
J_2 = & 0 + k & 1 + 2k & 1 + k & 2 + k & 1 + 0k
\end{array}$$

usw.

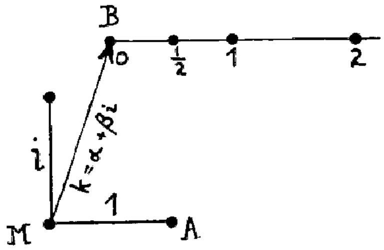


Fig. 25.

Die Reihen **J** und **N** bleiben die gleichen, da in ihnen k, ebenso wie i, entfällt. Für die algebraische Behandlung muß statt i der komplexe Faktor $k = \alpha + \beta i$ eingeführt werden.

Einschiebung im Raum zwischen drei Richtungen kann gedacht werden. Ihr entspricht die Addition: $ah + bk + cl$, doch wollen wir hiervon vorläufig absehen. In der Krystallographie sind Anzeichen für ausnahmsweise Einschiebung nach diesem Gesetz, z. B. Bildung von Octaederflächen am Würfel u. A. In der Regel jedoch vollzieht sich bei den Krystallen die Einschiebung in der Zone, d. h. in der Ebene zwischen zwei Richtungen.

Umkehrung. Ableitung der Reihe J aus N geschieht in folgender Weise: Ist $p = \frac{a}{b}$ ein Glied der Reihe **N**, so ist das entsprechende Glied der J-Reihe: $P = a + bi$.

Beispiele: $p = \frac{2}{3}$; $P = 2 + 3i$; $p = 3 = \frac{3}{1}$; $P = 3 + i$.

Richtung und Intensität der abgeleiteten (eingeschobenen) Kräfte. Rein geometrisch ist die Einschiebung als Addition denkbar. Mechanisch nicht. Fassen wir die Ableitung mechanisch in dem Sinn auf, daß an Stelle der zwei primären Kräfte eine harmonische Gruppe tritt, bestehend aus Kräften in den beiden ursprünglichen Richtungen, dazu anderen in abgeleiteten Richtungen, die das Gesetz der Complikation vorschreibt, und die sich aus Teilen (Komponenten) zusammensetzen, die die primären Kräfte abgeben, so ist die Ableitung durch Addition nicht möglich. Durch Addition wird das eingeschobene Glied so groß wie die Summe der Primären und diese könnten daneben ohne Zufuhr von außen nicht bestehen.

Erste Einschiebung. Dominante. Wir wollen zunächst die erste Einschiebung betrachten. Sie ist von allen die wichtigste. Die erste eingeschobene Kraft nennen wir die Dominante. Sie hat die Eigentümlichkeit, daß sie einzel auftritt. Alle späteren Einschiebungen und die Primärkräfte erscheinen paarweise. Mechanisch sei das Problem so zu fassen, daß die beiden Primärkräfte ($MA = 1$ und $MB = i$) zur Bildung der abgeleiteten (MC) Teile abgeben, und zwar so, daß (wie wir zunächst annehmen):

$$MA : MC : MB = 1 : \frac{1+i}{2} : i = 2 : (1+i) : 2i \text{ ist und}$$

$$MA + MC + MB = 1 + i.$$

Wir nennen MC das räumliche oder vektorielle Mittel. Statt i kann $k = \alpha + \beta i$ gesetzt und dadurch die Größe der Primärkräfte und ihr Winkel beliebig groß gemacht werden. Es ist Einschiebung auch in anderem Verhältnis denkbar, doch ist obiger Fall der einfachste und dadurch der wahrscheinlichste. Er dürfte in der Natur in den weitaus meisten Fällen verwirklicht sein. Ihn wollen wir zunächst allein durchführen. Andere Fälle (eventuell der allgemeine Fall) können nachträglich untersucht werden. Wir haben:

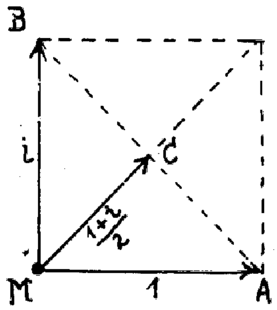


Fig. 26.

Complikation durch Einschiebung des vektoriellen Mittels. Wenn wir von Complikation reden, soll (wenn nicht anders gesagt wird) diese Einschiebung gemeint sein. Wir haben zu prüfen:

In wie viel gleiche Teile müssen $MA = 1$ und $MB = i$ zerfallen zur Bildung der harmonischen Gruppe. So nennen wir das Resultat des obigen Complikationsvorgangs. Der Zerfall geschehe in m Teile, dann haben wir:

$$\frac{A}{m}[2 + (1+i) + 2i] = 1 + i, \text{ woraus: } m = 3.$$

Der Zerfall geschieht somit in drei gleiche Teile.

Anmerkung. Voraussetzung der Complikation in obigem Sinn ist der Zerfall in drei gleiche Teile. **Zerfall in zwei Teile** würde $MA : MC : MB = 1 : (1+i) : i$ machen. Darin ist $MC = MA + MB$, somit die Dominante größer als jede der Primärkräfte. Auch dieser Fall dürfte in der Natur vorkommen, z. B. bei den Krystallen. Wir wollen ihn hier nicht verfolgen.

Zerfall in vier Teile, wobei $MA : MC : MB = 3 : (1+i) : 3i$, oder $= 1 : 3(1+i) : i$.

Auch dieser Fall dürfte vorkommen. Wir wollen von seiner Verfolgung vorläufig absehen, desgleichen vom Zerfall der Primärkräfte in mehr als vier Teile, allgemein in n Teile. In allen Fällen sind die harmonischen Zahlen $p = \frac{a}{b}$ für ein Glied $a + bi$ von der Größe der Zahl m unabhängig.

Wir kehren zu unserem Fall der Teilung in 3 gleiche Teile zurück und nennen diese Complikation die normale.

Normale Complikation. Wir finden:

$$\tfrac{1}{3}\,[2 + (1 + i) + 2i] = 1 + i$$

$$\text{oder } \tfrac{2}{3}\left[1 + \frac{1+i}{2} + i\right] = 1 + i$$

Bilden sich **weitere Einschiebungen** nach dem gleichen Gesetz, unter Bildung des vektoriellen Mittels, so halbieren sich die Einschiebungen in den Reihen $E_0\, E_1\, E_2\, E_3\, E_4 \cdots$ (S. 28) und wir erhalten:

E_0: $0 + 1i$ · · · · · · · · $1 + 0i$

E_1: · · · · · $\frac{1+i}{2}$ · · · ·

E_2: · · · $\frac{1+2i}{8}$ · · · $\frac{2+i}{8}$ · ·

E_3: · · $\frac{1+3i}{32}$ · $\frac{2+3i}{32}$ · $\frac{3+2i}{32}$ · $\frac{3+i}{32}$ ·

E_4: · $\frac{1+4i}{128}$ · · · usw.

Anmerkung. Daß bei E_2 nicht 4, sondern 8 im Nenner erscheint, bei E_3 nicht 8, sondern 32, entspricht dem Prinzip der Differenzierung in folgendem Sinn: Bei Bildung von eingeschobenen Gliedern behalten die bestehenden Vektoren die Hälfte ihres Bestandes in der alten Richtung und verteilen die andere Hälfte zu gleichen Teilen nach beiden Seiten, zur Bildung des jungen, eingeschobenen Vektors. Jedem von diesen Vektoren fällt somit ein Viertel (nicht die Hälfte) von den Nachbaren als Komponente zu. Also ein Viertel von $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; ein Viertel von $\frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ usw.

Die Zahl der eingeschobenen Glieder wächst geometrisch mit der Kennziffer der Reihe. Sie beträgt bei: $E_0 = 0$; $E_1 = 1$; $E_2 = 2$; $E_3 = 4$; $E_4 = 8 \cdots E_n = 2^{n-1}$.

Je größer die Zahl der eingeschobenen Glieder, desto schwächer wird jedes neu eingeschobene Glied. Daraus folgt der Satz:

Jedes Glied einer späteren Einschiebung steht im Rang (Intensität) hinter den Gliedern früherer Einschiebung zurück.

Graphische Darstellung der Einschiebungen. Wir erhalten folgendes Bild (Fig. 27). Das Bild bedarf keines Kommentars. Es

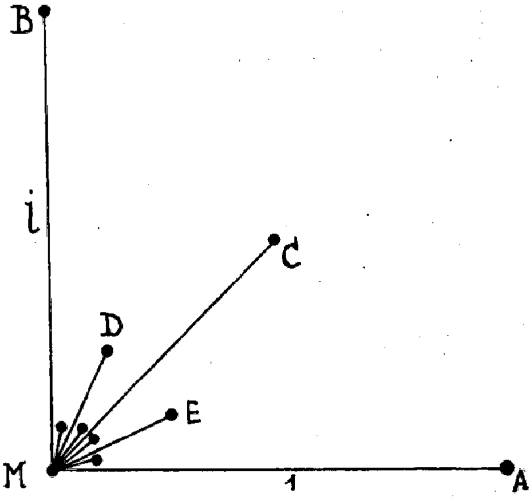


Fig. 27.

zeigt, wie rasch die Glieder an Stärke abnehmen. Ferner zeigt es, wie durch die Einschiebung der Raum eng wird. Dieses Engerwerden des Raumes setzt zugleich mit der Abnahme der Kraft der Entwicklung praktisch eine Grenze. Die Grenze liegt in der Regel bei C_3.

Fügen wir die eingeschobenen Glieder zu, so erhalten wir die Complikationsreihen $C_0\, C_1\, C_2\, C_3 \ldots$ In jeder derselben soll die Summe aller Glieder $= 1 + i$ sein. Wir haben daher:

$$C_0: \quad 1 + i$$

$$C_1: m_1\left(1 + \frac{1+i}{2} + i\right) = 1 + i;\; m_1 = \tfrac{2}{3}$$

$$C_2: m_2\left(1 + \frac{2+i}{8} + \frac{1+i}{2} + \frac{1+2i}{8} + i\right) = 1 + i;\; m_2 = \tfrac{8}{15}$$

$$C_3: m_3\left(1 + \frac{3+i}{32} + \frac{2+i}{8} + \frac{3+2i}{32} + \frac{1+i}{2} + \frac{2+3i}{32} + \frac{1+2i}{8} + \frac{1+3i}{32} + i\right) = 1 + i;\; m_3 = \tfrac{32}{69}$$

Wir können statt dessen schreiben:

$$C_0: \; 1\; [1 + i] = 1 + i$$

$$C_1: \; \tfrac{1}{3}\; [2 + (1 + i) + 2i] = 1 + i$$

$$C_2: \; \tfrac{1}{15}\; [8 + (2 + i) + 4(1 + i) + (1 + 2i) + 8i] = 1 + i$$

$$C_3: \; \tfrac{1}{69}\; [32 + (3+i) + 4(2+i) + (3+2i) + 16(1+i) + (2+3i) + 4(1+2i) + (1+3i) + 32i = 1 + i$$

$$C_4: \tfrac{1}{303}\; [128 + (4 + i) + \cdots \text{ usw.}$$

Die Reihe läßt sich in folgender Form schreiben:

$$C_n = \frac{1}{m}(1 + i)\left[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{9}{32} + \tfrac{27}{128} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{m}(1 + i)\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{3}{4} + (\tfrac{3}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^3 + \cdots + (\tfrac{3}{4})^{n-1}\right)\right]$$

Das Gesetz ist klar. Die Reihe läßt sich für $n = \infty$ anschreiben. Wir haben:

$$C_\infty: \frac{1}{m}(1 + i)\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{3}{4} + (\tfrac{3}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^3 + \cdots (\tfrac{3}{4})^{n-1} + \cdots\right)\right]$$

Die Reihe ist konvergent und gibt die Summe:

$$\mathbf{C}_\infty = \frac{3}{m}(1+i) = 1 + i;\quad m = 3$$

Das ist ein schönes einfaches Resultat.

Das Bildungsgesetz ist klar. Statt der Endglieder $1 + i$ können wir $A + B$ setzen, wobei A und B vektorielle Größen sind. Wir können schreiben:

$$A = a + \alpha i;\quad B = b + \beta i$$

Dann ist allgemein:

$$\mathbf{C}_n = \frac{1}{m}(A+B)\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{3}{4} + (\tfrac{3}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^3 + \cdots (\tfrac{3}{4})^{n-1} \cdots\right)\right]$$

$$\mathbf{C}_\infty = \frac{3}{m}(A+B) = A + B;\quad m = 3$$

Diese Art der Einschiebung dürfte solchen Vorgängen in der Natur entsprechen, bei denen die Mannigfaltigkeit dadurch entsteht, daß sich jeweils ein schwächeres, jüngeres Glied zwischen je zwei ältere, stärkere einschiebt. Auf dieser Annahme wollen wir weiterbauen.

Unendliche Reihe. $C_0\, C_1 \cdots C_n \cdots C_\infty$. Die Reihe läßt sich ins Unendliche weiterentwickeln. Sie geht aber in der Natur, soweit meine Erfahrung reicht, über C_3 in der Regel nicht hinaus. Selten bis C_4. Wir können uns daher bei den Untersuchungen über Complikation in der Natur auf die Reihen $\mathbf{C}_0\, \mathbf{C}_1\, \mathbf{C}_2\, \mathbf{C}_3\, \mathbf{C}_4$ beschränken.

Die Zahl n schreitet nach ganzen Zahlen fort: $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots$

Die Reihen und ihre Gesamtheit als Funktion. Das Bildungsgesetz ist klar. Sind die beiden Endwerte A und B (hier 1 und i) festgelegt, so ist für jede Reihe C_n die Gesamtheit der Glieder, sowie jedes Einzelglied nach Richtung und Intensität bekannt. Das Ganze erscheint als eine Funktion von n zwischen den Endgliedern A und B. Wir wollen die Funktion Complikationsfunktion oder C-Funktion nennen. Dann erscheint sie in der Form:

$$\begin{matrix} B \\ C_n \\ A \end{matrix}$$

A und B nennen wir die Grundwerte (Elemente) der Funktion, n ihre Stufe. Dabei ist n eine ganze Zahl. Welchen Sinn die Funktion hat, wenn n eine beliebige Größe ist, mag Frage der Prüfung sein.

Gesetz der Descrescenz sei das Gesetz, nach dem die Stärke der eingeschobenen (jungen) Glieder gegenüber der der alten ab-nimmt. Eines dieser Gesetze haben wir unserer Rechnung zugrunde gelegt. Es ist zu prüfen, ob in der Natur nur dieses Verjüngungsgesetz gefunden wird, oder mehrere solche Gesetze. Kommt nur dies Gesetz vor, so gibt es praktisch eine einzige Complikationsreihe. Der Wert der einzelnen Glieder ist dann nur von den Endgliedern A B abhängig. Die Reihe ist eine unendliche. Wir können schreiben:

$$\overset{A}{\underset{B}{C\infty}} \quad \text{oder} \quad \overset{A}{\underset{B}{C}}$$

Verkürzung der Reihe. Der zugefügte Index n in der Form $\overset{B}{\underset{A}{C_n}}$ sagt dann aus, es solle bei den Gliedern der Stufe n die Reihe abgebrochen werden.

Die Complikationsreihe unterscheidet sich von anderen unendlichen Reihen dadurch, daß die neuen Glieder sich nicht an die alten am Ende anreihen, sondern sich zwischen dieselben einschieben.

Die harmonischen Zahlen $p = \frac{a}{b}$ für ein Glied $\frac{1}{2^n}(a + bi)$ sind unabhängig von dem Intensitätsfaktor $\frac{1}{2^n}$ und von dem Richtungsfaktor i.

Oktave. Anschließend an die musikalische Harmonie wollen wir eine Reihe $\mathbf{C} = (1 \ldots . i)$ oder $\mathbf{C} = (A \ldots . B)$ Oktav nennen. Innerhalb der Oktav kann die Differenzierung beliebig weit gehen: bis $\mathbf{C}_1\ \mathbf{C}_2\ \mathbf{C}_3\ \mathbf{C}_4 \ldots .$ Eine solche Oktav ist bei den Tönen die Reihe: c . . e f g a b . . $\bar{c}$, bei den Farben das sichtbare Spektrum mit seinen Fraunhoferlinien A B . . . H; in der Krystallographie das freie Zonenstück, in der Astronomie die Reihe: Sonne . . Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, oder Sonne, Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter.

Zahl der Glieder einer Complikationsreihe C. Die Zahl der Glieder beträgt:

$$\begin{array}{ll}
\text{bei } C_0 & = 2 \\
\text{,, } C_1 & = 2 + 1 \\
\text{,, } C_2 & = 2 + 1 + 2 \\
\text{,, } C_3 & = 2 + 1 + 2 + 4 \\
\text{,, } . & \quad \ldots . \\
\text{,, } C_n & = 2 + 1 + 2 + 4 \cdots + 2^{n-1} = 2^n + 1 \\
\text{,, } C_\infty & = \infty
\end{array}$$

Soll die Reihe ins Unendliche verlaufen und zugleich mechanisch einen Sinn haben, so muß sie **konvergent** sein. Das heißt: die Stärke der neu eingeschobenen Glieder muß mit der Ableitungszahl (n) so rasch abnehmen, daß die Reihe konvergiert. Die letzten eingeschobenen Glieder sind unendlich klein. Die rasche Abnahme hat zur Folge, daß nach einer kleinen Zahl von Einschiebungen in der Natur die zutretenden Glieder so schwach werden, daß sie nicht in die Erscheinung treten. Die Reihe ist theoretisch als eine unendliche Reihe zu behandeln. Praktisch ist sie eine endliche infolge Vernachlässigung späterer (jüngerer, schwächerer) Glieder.

Von der **Stärke** der eingeschobenen Vektoren hängt ihre **Wahrscheinlichkeit** ab. Sinkt die Wahrscheinlichkeit unter eine bestimmte Grenze, so wird sie praktisch, d. h. für die Ausbildung in der Natur gleich 0.

Wir können mathematisch die Complikationsreihe allgemein als eine unendliche konvergente Reihe ansehen, von der praktisch (physikalisch) nur die ersten abgeleiteten, die stärksten, die wahrscheinlichsten Glieder in die Erscheinung treten.

Von dieser unendlichen Reihe (Complikationsreihe) interessiert uns nicht die Summe. Diese ist immer $= 1 + i$. Uns interessiert vielmehr die **Zahl der Glieder,** deren **Stärke, Richtung, Wahrscheinlichkeit.** Da, wo sich in der Natur die Intensität eines Gliedes durch Messung nicht streng bestimmen läßt, läßt sich doch oft die Richtung und Rangordnung gewinnen. Die mathematisch für die Einzelglieder abgeleiteten Werte kontrollieren und korrigieren die beobachteten Maße und Zahlen.

Unstetigkeit der Reihe. Bedenken. Die Complikationsreihe besteht aus einer Anzahl rationalzahliger Glieder, die durch Übergänge nicht verbunden sind; sie bilden somit eine **unstetige** Reihe. Nun geben die Zahlen der Reihe das Bild eines Naturvorganges (der Complikation). Alle Naturvorgänge aber sind stetig. Die Natur kennt keine Sprünge. Wie ist die Unstetigkeit zu erklären?

Die Lösung des Widerspruchs dürfte darin zu suchen sein, daß die den einzelnen Zahlen entsprechenden Größen **Kulminationen** sind (Maxima, Verdichtungen). Solche Kulminationen bilden in der Natur Reihen mit rationalen Distanzen, so z. B. die Höhenpunkte eines Wellenzugs.

Der Begriff unstetig ist hier so zu verstehen, daß bei dem hier ausschließlich gedachten Fortschreiten der Variabeln n nach den ganzen Zahlen 1 · 2 · 3 · · · die Größen der Complikationsreihen sich mit endlichen Differenzen einschieben.

Periodische Reihe. Periodische Funktion. Konvergenz. Periodisch nennen wir eine Reihe von Ausdrücken, bei der sich gleich gebaute Ausdrücke (Komplexe) aneinanderschließen. Die Reihe der Komplexe kann endlich oder unendlich sein. Den mathematischen Ausdruck einer periodischen Reihe als Ganzes nennen wir eine periodische Funktion. Man nennt die Reihe auch noch dann periodisch, wenn die einzelnen Glieder zwar gleich gebaut, aber nicht gleich an Wert sind, oder nicht gleich an innerer Differenzierung.

Beispiel 1. Den Dezimalbruch 3,3333 .... nennen wir in diesem Sinn eine periodische Reihe. Die Reihe ist eine unendliche und eine konvergente, mit der endlichen Summe $\frac{10}{3}$. Die Glieder sind alle gleich gebaut, aber sie haben nicht gleichen Wert. Der Wert jedes folgenden Gliedes ist gleich $\frac{1}{10}$ von dem des Vorhergehenden.

Beispiel 2. Den Dezimalbruch 12321 ,12321 12321 12321 ... nennen wir ebenfalls eine periodische Reihe. Jedes Glied der Periode hat den gleichen symmetrischen Bau (12321), aber der Wert nimmt stetig ab. Der Wert jedes folgenden Komplexes ist ein Hunderttausendstel von dem des vorhergehenden Komplexes. Die Reihe ist eine unendliche. Sie ist konvergent und hat eine endliche Summe.

Beispiel 3. Unsere Reihe innerlich nach dem Complikationsgesetz differenzierter Oktaven läuft nach beiden Seiten ins Unendliche. Sie ist eine periodische Reihe. Soll sie mechanisch einen Sinn haben, so muß sie konvergieren. Das Gesetz der Abnahme ist Sache besonderer Untersuchung.

Abnahme der Complikation von Oktav zu Oktav. Die innerste Oktav (Anfangsoktav) ist die am weitestgehenden differenzierte. Nach außen nimmt mit der Stärke der Oktav die Complikation ab. Das liegt im Wesen der konvergenten periodischen, unendlichen Reihe. Faktisch zeigt sich die Erscheinung bei der Entwicklung der Krystallformen, aber auch bei den Tönen in der Musik.

Beispiel 4. Eine Welle breitet sich von einem Punkt aus auf der Fläche des Wassers aus. Es folgen sich Wellenberg und Wellental und bilden eine periodische Reihe. Jede Welle hat den gleichen

Bau, sie ist eine Sinuskurve. Aber nach außen nimmt die Höhe der Wellen ab. Die Reihe ist konvergent und hat eine endliche Summe. Die periodische Reihe läuft konvergent nach allen Richtungen der Ebene zugleich ins Unendliche.

Konvergenz. Soll eine periodische Reihe eine unendliche sein und doch mechanisch einen Sinn haben, so muß sie konvergent sein, d. h. der Wert der Glieder muß stetig abnehmen und ihre Summe muß endlich sein. Das Gesetz der Abnahme kann verschieden sein.

Ausnahme 1. Endliche Oktavreihen aus gleichen Gliedern (ohne Abnahme) gibt es bei zyklischen Oktavreihen, z. B. bei den Krystallformen.

Beispiel 5. Die Bahn eines Nagels auf der Peripherie eines Rades, das auf einer Ebene hinrollt, bildet eine periodische Reihe. Jedes Glied der Reihe (einer Umdrehung entsprechend) ist dem vorhergehenden absolut gleich. Die Reihe ist endlich und nicht konvergent. Sie endet mit dem Stillstand des Rades.

Ausnahme 2. Ausnahmsweise kann eine unendliche periodische Reihe aus lauter gleichen Gliedern bestehen, so daß sie nicht konvergiert und keine endliche Summe hat und ihr doch eine physikalische Bedeutung zukommt.

Beispiel. Die Reihe der **Tage** und **Nächte,** die Reihe der **Jahre** mit ihren physikalischen Begleiterscheinungen, als Sommer und Winter. In diesem Fall ist die Summe der Reihe unendlich. Jedes Glied (z. B. der Tag, das Jahr ...) bildet eine Einzelperiode, die Gegenstand des Interesses ist, ebenso die Aneinanderreihung der Tage zum Jahr. Aber die Summe der Tage ist, soweit wir ermessen können, unendlich.

Periodische Funktion. Nach unserer Definition (S. 47) bildet die konvergente periodische Reihe als Ganzes eine periodische Funktion. Ob die nicht konvergente Reihe mit der Summe $= \infty$ als periodische Funktion anzusehen ist, bedarf der Festlegung.

Periodische Funktion ist also eine solche, in der sich gleichgebaute Komplexe aneinanderreihen. Bei unserer C-Funktion begegnen wir einer solchen periodischen Weiterbildung. In der musikalischen Harmonie sind wir gewohnt, daß sich Oktaven aneinanderreihen, deren jede in gleicher Weise in Einzeltöne gegliedert ist. Daß diese Gliederung in der Oktav nach unserem Complikationsgesetz geschieht, wurde bereits vom Verfasser dargelegt

(Harmonie und Complikation 1901). Das Klavier mit seinen Tasten gibt ein Bild dieser Oktavenreihen. An eine mittlere Oktav (Mittellage der Stimme) schließt sich nach oben und unten je eine Oktav an. Mit diesen drei Oktaven kann es sein Bewenden haben und das tut es in einem großen Teil der praktischen Musik. Es können sich aber zu beiden Seiten weitere Oktaven anreihen, nach oben und nach unten, bis ins Unendliche. Wir unterscheiden danach endliche und unendliche Oktavenreihen.

Unsere **musikalische Oktavenreihe** ist theoretisch eine unendliche. Die Wichtigkeit der Oktaven nimmt aber von der mittleren Oktav nach beiden Seiten stetig ab und sie wird an einer gewissen Grenze so gering, daß die praktische Anwendung entfällt. In unserer Musik reihen sich an die mittleren Oktaven nach oben und nach unten drei bis vier Oktaven, dann reißt die Reihe praktisch ab, wenigstens für die Musik. Dem Gehör sind noch eine Anzahl Oktaven zugänglich, besonders nach oben.

Statistik. Wir wollen das Gesetz der Abnahme der Intensität (Wichtigkeit) hypothetisch ansetzen. Es wäre von Interesse, das Gesetz der Abnahme empirisch zu belegen, und zwar durch eine Statistik der Häufigkeit der Töne nach ihrer Höhe in den Musikwerken. Es wäre dann die theoretische und die empirische Gesetzmäßigkeit in Einklang zu bringen.

Oktavenreihen bei den Spektrallinien (Farben). In der Schrift über Harmonie und Complikation wurde gezeigt, daß nicht nur die F a r b e n eine Oktave bilden, das war bereits Newton bekannt, sondern auch die F r a u n h o f e r - L i n i e n **A B · · · H**, daß deren Orte sich mit den Orten der reinen Begriffsfarben decken und daß beide die gleiche harmonisch differenzierte Gruppe ($p = 0\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ 3\ \infty$) bilden.

In der Schrift des Verfassers „F a r b e n i n d e r K u n s t“ (Winter, Heidelberg 1919, S. 115) wurde gezeigt, daß an die sichtbare Oktav der Spektrallinien **A B · · · H** sich im Ultraviolett eine ebenso gebaute Oktav ansetzt, die da abreißt, wo (infolge Absorption durch die Atmosphäre) Licht höherer Schwingung nicht zu uns kommt. Wir dürfen annehmen, daß weitere Oktaven sich oben und unten anreihen und daß die mathematische Funktion, die den Spektrallinien ihren Ort vorzeichnet, eine periodische Funktion ist, und zwar die gleiche wie bei den Tönen.

Unsere **hypothetische Annahme** sei nun, daß die jeweils folgende (jüngere) Oktav **halb so stark** sei, als die vorhergehende (ältere). Diese scheinbar willkürliche Annahme dürfte, als die einfachste, die größte Wahrscheinlichkeit für sich haben. Erfahrungsgemäß ist in der Natur das Einfachste in den weitaus häufigsten Fällen das Zutreffende. Die Wahrscheinlichkeit und damit die Häufigkeit nimmt mit zunehmender Kompliziertheit rasch ab. Die Konsequenzen aus dieser Annahme werden zeigen, ob die Annahme richtig ist.

Wir wollen die folgende Schreibweise einführen. Es bedeute:

$$A \underset{\dots}{+} B$$

eine nach dem Complikationsgesetz harmonisch gegliederte Reihe zwischen den Endgliedern A und B. A und B seien vektorielle Größen von der Form $A = a + \alpha i$; $B = b + \beta i$, wobei $a\, b$, $\alpha \beta$ reelle Größen sind. Es sei die Größe von $(A \underset{\dots}{+} B)$, d. h. die Summe ihrer Glieder

$$= A + B = a + b + (\alpha + \beta)\, i.$$

Ein **wichtiger Spezialfall** ist $(1 \underset{\dots}{+} i)$. Diesen Fall wollen wir, wo es paßt, statt des allgemeinen Falles anschreiben.

Endliche Oktavenreihen. Von diesen interessiert uns besonders die

Dreioktavige Reihe, bei der sich zu beiden Seiten der Anfangsoktav eine schwächere (halb so starke) anlegt. Dann haben wir die endliche Reihe:

$$\frac{1}{m}\left[(A \underset{\dots}{+} B) + 2\,(A \underset{.\;.}{+} B) + (A \underset{\dots}{+} B)\right];\ \Sigma = A + B;\ m = 4$$

Wir erkennen: Zur Bildung dieser Reihe sind A und B in vier gleiche Teile zu teilen. Da die Vierteilung, d. h. die zweimalige Halbierung etwas sehr Wahrscheinliches und Häufiges ist, so hat die Bildung dieser Gruppe viel Wahrscheinlichkeit.

Wir wollen die einzelnen Oktaven mit O bezeichnen. Die Ausgangsoktav mit O_1, die abgeleiteten mit ${}_2O$ und O_2, dann ${}_3O$ und $O_3 \ldots$, dann können wir schreiben:

$$\tfrac{1}{4}\left[{}_2\mathbf{O} + {}_1\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\right]$$

Innerhalb jeder Oktav kann die Differenzierung (Complikation) beliebig weit gehen. In der Regel geht sie in der stärksten (mittleren) Oktav am weitesten. Sie geht beispielsweise in ${}_1O_1$ bis zur Complikation C_1, in ${}_2O$ und O_2 nur bis zu C_0. Also:

$$C_0 + C_1 + C_0 = (A + B) + 2\left\{\tfrac{1}{3}\left[2\,A + (A + B) + 2\,B\right]\right\} + (A + B)$$

Oder sie geht in der mittleren Oktav bis C_2, in der oberen und unteren nur bis C_1. Wir haben dann die Oktavenreihe:

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$$

Fünfoktavige Reihe. Es mögen sich zu beiden Seiten der Anfangsoktav ${}_1\mathbf{O}_1$ je zwei schwächere Oktaven ${}_2\mathbf{O}$, $\mathbf{O}_2$ und ${}_3\mathbf{O}$, $\mathbf{O}_3$ anreihen. Wir haben dann:

$$\frac{1}{m}[{}_3\mathbf{O} + 2\,{}_2\mathbf{O} + 4\,{}_1\mathbf{O}_1 + 2\,\mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_3]$$

oder:

$$\frac{1}{m}[(A \underset{\dots}{+} B) + 2(A \underset{\dots}{+} B) + 4(A \underset{\dots}{+} B) + 2(A \underset{\dots}{+} B) + (A \underset{\dots}{+} B)];\ \Sigma = A + B$$

$$\text{Daher } m = 10.$$

Zur Bildung einer solchen Reihe müssen sich A und B in 10 gleiche Teile teilen, von denen vier auf ${}_1\mathbf{O}_1$ fallen, je zwei auf ${}_2\mathbf{O}$ und $\mathbf{O}_2$ und je einer auf ${}_3\mathbf{O}$ und $\mathbf{O}_3$. Es kann auch so geschehen, daß A und B in Fünftel zerfallen, von denen zwei Teile ${}_1\mathbf{O}_1$ zufallen, je ein Teil an ${}_2\mathbf{O}$ und $\mathbf{O}_2$ fällt, der letzte Teil sich nochmals halbiert und auf ${}_3\mathbf{O}$ und $\mathbf{O}_3$ verteilt. Das kommt auf das Gleiche heraus.

Unendliche Oktavenreihe sei eine solche, bei der sich an eine Anfangsoktav ${}_1\mathbf{O}_1$ zu beiden Seiten unendlich viele Oktaven anreihen, jede folgende mit halber Stärke. Die Summe der Reihe soll aber gleich $A + B$ bleiben. Dann haben wir:

$$\frac{1}{m}[\cdots \tfrac{1}{8}(A \underset{\dots}{+} B) + \tfrac{1}{4}(A \underset{\dots}{+} B) + \tfrac{1}{2}(A \underset{\dots}{+} B) + (A \underset{\dots}{+} B) + \tfrac{1}{2}(A \underset{\dots}{+} B)$$
$$+ \tfrac{1}{4}(A \underset{\dots}{+} B) + \tfrac{1}{8}(A \underset{\dots}{+} B) + \cdots\cdots]$$
$$= \frac{1}{m}(A + B)(1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots) = \frac{3}{m}(A + B);\quad m = 3.$$

Zur Bildung einer solchen zweiseitig-unendlichen Reihe zerfallen **A** und **B** in drei gleiche Teile. Einer dieser Teile bildet die mittlere Oktav. Von den beiden anderen Dritteln wird nach jeder Seite eines abgegeben. Dieses teilt sich in zwei gleiche Teile, behält den einen Teil und gibt einen Teil zur fortgesetzten Halbierung ab. Das ist ein einfacher Bildungsvorgang, der sich in der Natur häufig abspielen dürfte. Wie viele Oktaven sich faktisch ansetzen, resp. welche Oktaven als zu schwach nicht in die Existenz treten, hängt von Verhältnissen ab. Praktisch dürfte O_3 selten überschritten werden.

Anmerkung. Die Gesangsmusik legt an die mittlere Oktav für Männer- wie Frauenstimmen beiderseits (nach oben und unten) je eine Oktav an. Die Instrumentalmusik geht weiter. Das Klavier hat 8 Oktaven, 2 mittlere (für Oberund Unterstimme) und beiderseits weitere 3. Das Gehör geht noch weiter. Die ultrahohen Töne setzen sich über unser Gehör hinaus in weiteren Oktaven (für Grillen und Ameisen wahrscheinlich hörbar) fort und verlaufen, immer zarter werdend, ins Unendliche.

Zyklische Oktavenreihen seien solche, die sich zum Kreis aneinanderschließen. Diese Anordnung ist bei den Flächennormalen der Krystallformen die gewöhnliche. Wir wollen für sie das Schema aufstellen, und zwar zunächst für den einfachen Fall, daß sich zwischen die Primärflächen nur eine erste abgeleitete (Dominante) einschiebt (Complikation C_1). Das geschieht der Übersicht wegen. Der allgemeine Fall (beliebige Complikation C_n) ergibt sich daraus leicht.

Wir nehmen zunächst die einfachsten Fälle: Es seien (Fig. 28) A A' B B' die Primärkräfte, so erhalten wir die Verteilung im Kreis:

$$\frac{A}{2}+\frac{A+B}{4}+\frac{B}{2}+\frac{B+A'}{4}+\frac{A'}{2}+\frac{A'+B'}{4}+\frac{B'}{2}+\frac{B'+A}{4}$$
$$=A+B+A'+B'$$

Jede Primärkraft (A.B.A'.B') zerfällt in 4 gleiche Teile. Von diesen bleiben je zwei in der primären Richtung, einer tritt mit einem Nachbar zur Dominante zusammen. Dabei dürfen A B A' B' ungleich groß, auch gegeneinander schief geneigt sein. Die Verteilung ist die denkbar einfachste. Deshalb ist sie die wahrscheinlichste und wohl die häufigste.

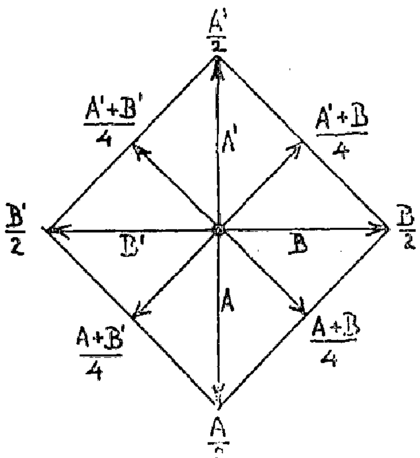


Fig. 28.

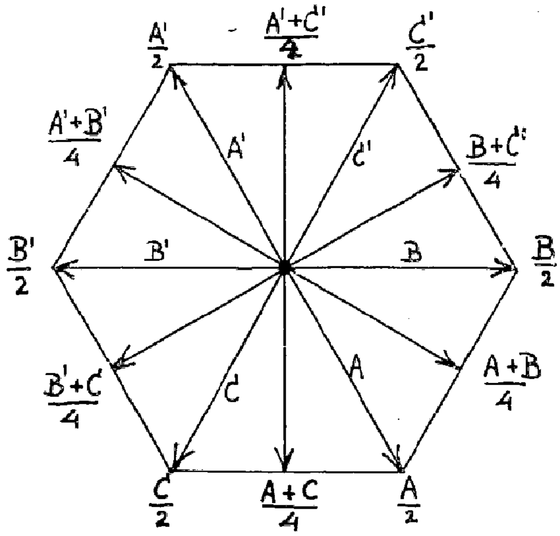


Fig. 29.

Hexagonale Verteilung (Fig. 29) gibt ein ähnliches Bild. Auch hier zerfällt jede Primärkraft in 4 gleiche Teile, von denen 2 in der primären Richtung bleiben, die übrigen 2 zur Bildung von Dominanten beiderseits verwendet werden.

Trigonale, Polygonale Verteilung. Sie alle geben das gleiche Bild. In den einzelnen Quadranten, Sextanten, Oktanten . . . muß die Complikation nicht gleich weit gehen. Das Maß der jedem Quadranten (Sextanten . . . . .) zukommenden Kraft $\frac{1}{2}(A+B)$ steht fest. Die Einzelverteilung in diesem Stück (Zonenstück) ist durch die Stufe der Complikation (C_n) in demselben vorgezeichnet.

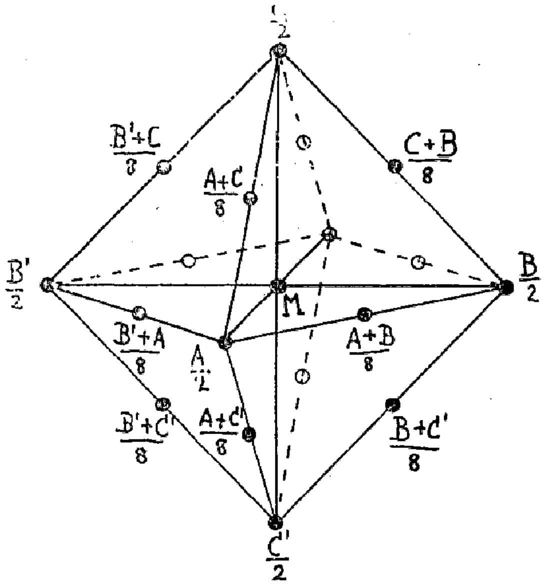


Fig. 30.

Zyklen im Raum sind bei Krystallen das Gewöhnliche. Wir haben folgende Verteilung:

1. Tetragonaler Typus (Fig. 30). Die Summe ist:

$$\frac{1}{2}(A + A' + B + B' + C + C' + \frac{1}{8}[(A+B) + (A+B') + (A+C') + \cdots]$$
$$= A + A' + B + B' + C + C'.$$

Die Primärkräfte zerfallen in Hälften und dann (durch wiederholte Halbierung) in 8 gleiche Teile. Die Halbierung ist weitaus die wichtigste und häufigste Teilung. Danach dürfte diese Teilung als in der Natur vorzugsweise zutreffend anzusehen sein. Auf andere Teilungen möchte ich hier nicht eingehen. Ihr Ausbau und ihre Diskussion ist eine besondere Aufgabe.

Die Ebenen C M A, C M B, A M B nennen wir in der Krystallographie Zonenebenen. In den verschiedenen Zonenebenen kann die Complikation verschieden weit gehen, bis C_1 C_2 usw.

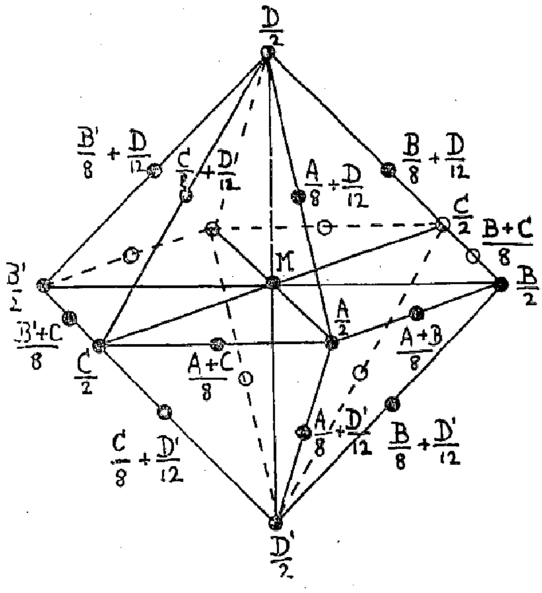


Fig. 31.

2. Hexagonaler Typus (Fig. 31). Die Summe ist:

$$\frac{1}{2}(A + A' + B + B' + C + C' + D + D') + \frac{4}{8}(A + A' + B + B' + C + C')$$
$$+ \frac{6}{12}(D + D') = A + A' + B + B' + C + C' + D + D'.$$

Dieser Typus ist neben dem tetragonalen der häufigste. Bei beiden Typen können die primären Intensitäten und Winkel verschieden sein. Die harmonischen Verhältnisse bleiben. Von der Vorführung weiterer Typen will ich hier absehen. Ihre Darlegung und Ausarbeitung ist Sache der Krystallographie.

Applizierende und implizierende Reihen und Funktionen. Viele (vielleicht die meisten) unserer mathematischen Funktionen lassen sich in die Form einer unendlichen Reihe bringen von der Form, daß sich an ein Anfangsglied eine unendliche Zahl immer kleiner werdender Glieder anreiht, deren Summe einen endlichen Wert hat. Diese Aneinanderreihung von Gliedern wollen wir Applikation nennen. Die Anreihung kann von Anfang aus linear geschehen, und zwar nach einer Seite oder nach beiden Seiten. Sie kann aber auch nach mehreren oder allen Richtungen der Ebene oder des Raumes, in Streifen, Ringen oder Schalen geschehen.

Unsere **Complikations-Funktion** hat einen anderen Charakter. Ihre Glieder hängen sich nicht nach außen an ein Anfangsglied an, sondern sie schieben sich, immer kleiner werdend, zwischen zwei Anfangsglieder (Primärglieder) ein. Diese Einschiebung immer kleiner werdender Glieder wollen wir Implikation nennen. Die Implikation kann (theoretisch) ins Unendliche gehen. Wir können den Vorgang auch als Gliederung oder innere Differenzierung bezeichnen. Die Implikation kann nach verschiedenen Gesetzen erfolgen. Als das wichtigste Gesetz der inneren Differenzierung in der Natur erscheint das Gesetz, das wir Complikationsgesetz nannten oder das Gesetz der harmonischen Gliederung. Danach erscheint die Complikation als ein spezieller Fall der Implikation.

Ein Bild der applizierenden Reihe bei den Lebewesen gibt der Bandwurm mit seinen Gliedern. Ein Bild der implizierenden Reihe (speziell der harmonischen Gliederung) die Hand mit ihren Fingern (Fig. 32 u. 33).

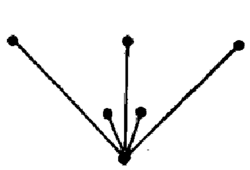


Fig. 32.


Fig. 33.

Die Applikation können wir **äußere Differenzierung** nennen, die Implikation **innere Differenzierung.**

Furkation (Gabelung). Der Implikation muß die Existenz zweier Anfangsglieder vorausgehen. Diese bilden sich in der Natur durch Zweiteilung einer Einheit. Wir nennen das Gabelung oder Furkation, oder durch Verdichtung auf 2 Vorzugsrichtungen. Wir nennen das Displikation. Die Gabelung (Furkation) kann sich wiederholen, indem ein jüngeres Glied sich wieder gabelt. Die Furkation kann sich, immer feinere Glieder erzeugend, ins Unendliche fortsetzen. Die Gesamtheit der Glieder bilden eine Einheit, ihr Wesen drückt sich als eine mathematische Funktion aus. Wir nennen sie **Furkal-Funktion.**

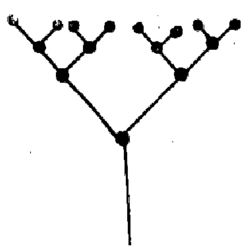
Innerhalb jeder Gabel kann sich die innere Differenzierung vollziehen. Das ist in der Natur häufig. Die innere Differenzierung in der Gabel geschieht in der Regel nach dem Complikationsgesetz. Es sind aber auch andere Gesetze der inneren Differenzierung denkbar.

Ein Bild der tausendfach wiederholten Furkation, die bei immer feiner werdender Differenzierung ein gegliedertes Ganze bildet, ist der **Baum** mit Stamm, Ästen, Zweigen und Zweiglein.

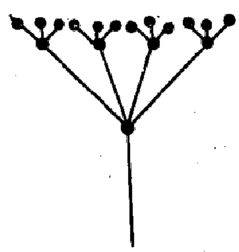
Die Furkation kann sich in der Ebene oder im Raum vollziehen. In der Ebene erscheint sie meist als Bifurkation, d. h. Bildung einer zweizinkigen Gabel. Die inneren Zinken der Gabel bilden sich durch innere Differenzierung (Implikation). Es kommt auch zyklische Furkation in der Ebene vor, unter gleichzeitiger Bildung mehrerer Gabeln. Ebenso im Raum. Solche zyklische Furkation findet sich bei den Krystallen. Sie liefert die Anfangsrichtungen (Primärknoten), zwischen denen sich die Formenentwicklung nach dem Gesetz der Complikation vollzieht. Bei den Krystallen können wir den Vorgang studieren, aber auch in anderen Gebieten.

Anmerkung. Die zyklische Furkation bei den Krystallen ist vielleicht besser als Displikation aus der Kraftsphäre aufzufassen.

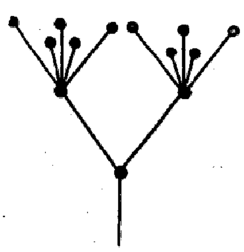
Furkation und Complikation in der Natur. Die Furkation ist der Typus für eine große Zahl von Entwicklungsvorgängen in



Wiederholte Bifurkation
Fig. 34.



Wiederholte Multiplikation
Fig. 35.



Gabelung mit Complikation
Fig. 36.

der Natur. Nach ihr bilden sich die Äste und Zweige (Fig. 34). Die Urgabel (als Werkzeug) mit ihren zwei Zinken ist ein gegabelter Ast. Im Anschluß an solche Verzweigung bilden wir Stammbäume, als Schema für alle möglichen Vorgänge und Zusammenhänge der Abstammung. Die Gabel kann bifurkal oder multifurkal sein. Sie kann zwei oder mehr Zinken haben. Ein schönes Beispiel der Gabelung in mehrere Zinken (Multifurkation) zeigen die Blütenstände mancher Pflanzen, z. B. die Dolden der Umbelliferen (Fig. 35). Innerhalb der Gabel kann sich der Prozeß der inneren Differenzierung vollziehen. Diese geschieht in der Regel nach dem Gesetz der Complikation. Ein Beispiel solcher Kombination von Gabelung und Complikation zeigen unsere beiden Arme mit den Händen und den durch Complikation differenzierten fünf Fingern (Fig. 36).

Der Vorgang der Furkation spielt sich vorwiegend in der belebten Natur ab. Bei Pflanzen und Tieren. Er kommt aber auch in der unbelebten Natur vor. Die Formen der unbelebten Natur sind wesentlich die Formen der Krystalle. Bei ihnen herrscht streng das Gesetz der Complikation. Es ist zu prüfen, ob und wann auch dort die Furkation Vorbedingung der Complikation ist. Zum Verständnis dieser Frage müßte ich näher auf krystallographische Dinge eingehen, was ich mir hier versagen möchte.

Die **Furkation** in der Natur läßt sich geometrisch darstellen, zunächst genähert, dann mit genauer Kenntnis und Auswertung nach Maß und Zahl, immer präziser. Es hat aber diese geometrische Darstellung ihr analytisches Äquivalent. Dies analytische Äquivalent, als Ganzes zusammengefaßt, nennen wir eine Funktion. Es ist unsere mathematische Aufgabe, diese Funktion analytisch und geometrisch auszubauen, um durch solchen Ausbau die Vorgänge in der Natur verfolgen zu können. Es ist eine der wertvollsten Eigenschaften einer mathematischen Funktion, daß ihr Ausbau (nach Herstellung der Analogie mit den Naturvorgängen) uns in den Stand setzt, Zusammenhänge in der Natur zu verstehen, ja unbekannte Erscheinungen zu berechnen, herauszufinden und vorherzusagen.

Danach erscheint der mathematische Ausbau der Furkal-Funktion sowie der Complikations-Funktion für die Naturwissenschaft von Wichtigkeit. Umgekehrt hilft der naturwissenschaftliche Ausbau der Furkation und Complikation der Mathematik bei ihrem Ausbau, sie führt ihr neue Kapitel und neue Aufgaben zu.

Naturwissenschaft und Mathematik. Es besteht ein Verhältnis der Gegenseitigkeit zwischen Naturwissenschaft und Mathematik. Die Mathematik hat den Naturwissenschaften Wertvolles gegeben. Dagegen hat die Naturwissenschaft der Mathematik Aufgaben gestellt und Wege vorgezeichnet. Baukunst und Astronomie haben die Grundlagen der Geometrie gelegt, und die Rechenkunst zählte die Schafe der Herde und die Tage des Jahres. Mathematik und Naturwissenschaft sind nicht zu trennen, und es ist müßig, darüber zu streiten, wessen Leistungen die wertvolleren sind. Die Mathematik selbst ist Naturwissenschaft. Wenn wir in Schillers „Spaziergang“ lesen:

Aber im stillen Gemach entwirft bedeutende Zirkel
Sinnend der Weise, beschleicht forschend den schaffenden Geist,
Prüft der Stoffe Gewalt, der Magnete Hassen und Lieben,
Folgt durch die Lüfte dem Klang, folgt durch den Äther dem Strahl,
Sucht das vertraute Gesetz in des Zufalls grausenden Wundern,
Sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht,

so fragen wir: Ist das Mathematik oder Naturwissenschaft? Wohl beides zugleich.

Sache der Naturwissenschaft ist nicht der mathematische Ausbau einer Funktion, ihr fällt dagegen die Aufgabe zu, ihre Probleme so zu formen, daß sie mit den bekannten mathematischen Funktionen behandelt werden können. Wo aber eine zur Bearbeitung des Problems dienliche Funktion seitens der Mathematik nicht geboten wird, kommt es der Naturwissenschaft zu, von der Mathematik eine solche Funktion zu verlangen und ihr das Material dazu an die Hand zu geben. Wenn möglich zu zeigen, daß eine solche Funktion vorliegt und möglichst viele Eigenschaften derselben anzugeben. Der Ausbau der Funktion fällt der Mathematik zu.

Beispiel. Naturwissenschaft und Philosophie hatten sich lange mit dem unendlich Kleinen befaßt, mit der Aufgabe, einen Körper (Krystall) in unendlich kleine Teilchen (durch Lösung) aufzulösen und aus den unsichtbar kleinen Teilchen (Molekülen) den greifbaren Körper (Krystall) mit all seinen Eigenschaften aufzubauen. Daraus ergab sich das naturwissenschaftliche Problem. Die Naturwissenschaft drängte auf Schaffung der Funktion und lieferte Eigenschaften derselben in großer Zahl. Und es ist kein Zufall, daß ein Philosoph (Leibniz), der sich mit der Natur befaßte, die wundervolle Differential- und Integral-Funktion geformt hat. Sache der Mathematiker war es, die Funktion auszubauen.

Es dürfte sich zeigen lassen, daß alle elementaren Funktionen der Mathematik (Summe, Differenz, Potenz, Wurzel, die trigonometrischen Funktionen u. a.) auf dem Boden der Naturwissenschaften entstanden, von der Mathematik strenger gefaßt und ausgebaut worden sind. So möge es denn auch mit unseren beiden neuen Funktionen geschehen. Es ist zu zeigen, daß hier in der Tat Funktionen vorliegen, oder doch solche Gebilde, die einer Zusammenfassung und Abklärung zu einer Funktion fähig sind. Ferner ist zu zeigen, daß die genannten Funktionen mathematisch, wie naturwissenschaftlich, so wichtig sind, daß sie der Festigung, der Abklärung und des Ausbaues wert sind. Diese Nachweise dürften sich beschaffen lassen.

Furkal-Funktion in Natur und Kunst. Von der Furkal-Funktion in der Natur war oben die Rede. Wir wollen uns mit diesen Andeutungen begnügen. Es spielt aber dieselbe Funktion eine wesentliche Rolle in der Kunst. Vielfach zeigt sich in den Kunstwerken die Form der Gabelung. Wo das der Fall ist, da herrscht auch genetisch das Gesetz der Furkation mit seinen mathematischen Konsequenzen. Wie weit diese Konsequenzen gehen, hängt im speziellen Fall von Bedingungen ab.

In der Geschichte der Kunst haben wir überall **Stammbäume** mit Teilung und Verzweigung (Furkation). Das allgemeine Bild ist das beistehende (Fig. 37). Ein Meister hat 2 Schüler, ein anderer 3. Jeder Schüler hat wieder Schüler. Das Ganze bildet ein furkal gegliedertes Ganzes, eine Schule. Das Bild ist mehr als eine Form. In ihm steckt ein gut Teil vom Wesen der Entwicklung in der Natur.

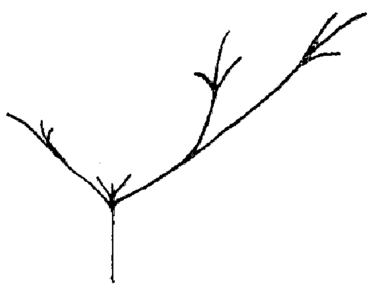


Fig. 37.

In den **Formen der bildenden Kunst.** Das Prinzip der Gabelung ist weit verbreitet. Da haben wir z. B. den vielarmigen

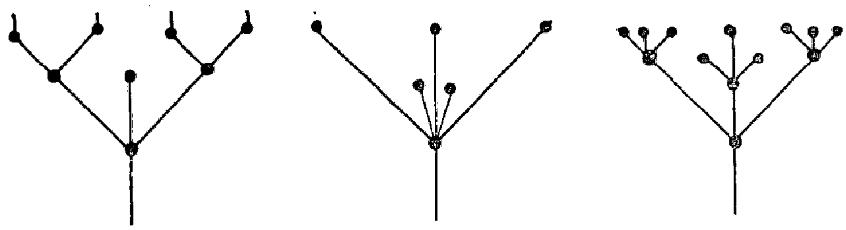


Fig. 38. Fig. 39. Fig. 40.

Leuchter (Fig. 38—40). Ein Akrobat trägt auf jeder Schulter einen Mann. Von diesen trägt jeder auf beiden Schultern je ein Kind. Das Ganze ist ein furkal entwickeltes lebendes Kunstwerk. Wollen wir weiter gabeln, so mögen die Kinder die Arme ausstrecken und in jeder Hand zwei Fähnchen tragen. Eine einfache Kunstform der Furkation ist die menschliche Gestalt mit erhobenen Armen.

Furkation in der Musik. Bei Studien über Aufbau der Musikstücke zeigte sich die Furkation (im Verein mit der Complikation) als ein wesentliches Bildungsprinzip. Eine Anzahl Beispiele wurde in der Schrift „Über Harmonie und Complikation“ 1901, Seite 42—57 gegeben. Ein Beispiel weitgehender Furkation bietet das Stabat Mater von Palestrina (S. 54). Aus dem Grundton wächst das Werk organisch heraus durch Furkation und Complikation, wie der Baum mit seinen Ästen und Zweigen. Die Ähnlichkeit ist keine zufällige. Der Komponist folgt dem Gesetz, ohne es zu wissen. Für das Einzelne muß ich auf genannte Schrift verweisen. Einiges bringt auch die Schrift des Verfassers „Über harmonische Analyse von Musikstücken“. Beistehende (Fig. 41) gibt ein Schema vom Aufbau eines Musikstückes.

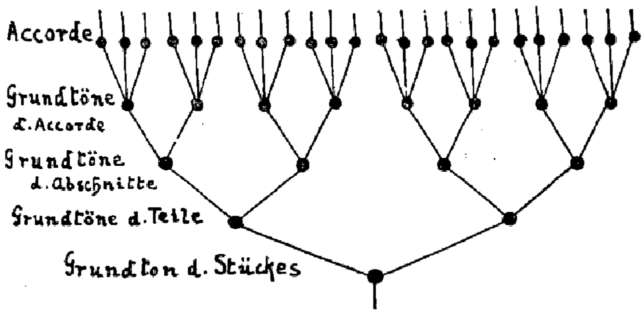


Fig. 41.

Der Bau der Musikstücke in seiner Gliederung in großen Abteilungen hinab bis zu den einzelnen Akkorden, die größten wie die kleinsten Werke, Bachs Mathäuspassion und das Liedchen vom Prinz Eugen, sind bis ins Feinste beherrscht durch die Gesetze der Furkation und der Complikation. Und zwar gilt das nicht nur für den harmonischen Bau der Stücke, d. h. für die Akkorde und deren Verband, sondern auch für den melodischen Bau, d. h. für das Gefüge der Töne in der Melodie. Letzteres soll an anderer Stelle dargelegt werden, bei Gelegenheit von Untersuchungen über das Wesen der Melodik. Die Untersuchungen sind soweit fertig, daß obige Behauptung aufgestellt werden kann.

Furkation und Complikation. Die Complikation setzt eine Furkation voraus, d. h. die Bildung der beiden Endknoten, zwischen denen die harmonische Differenzierung (Complikation) sich vollzieht. Andererseits kann die mehrfache Gabelung aus einem Knoten (Multifurkation) zugleich Complikation sein, so daß die Zinken der Gabel eine harmonische Gruppe bilden. Das ist nicht immer der Fall. Eine Katze kann zugleich 6 Junge zur Welt bringen, die harmonisch miteinander nichts zu tun haben. Dagegen sind die Finger der Hand, wie die Abschnitte eines Musikstückes, harmonisch gegliedert. Es ist übrigens zu prüfen, ob die Ausnahmen nicht scheinbare sind und ob ihnen nicht als tiefere Ursache eine Furkation oder Complikation zugrunde liegt.

Die Furkation kann (wie die Complikation) mathematisch ins Unendliche gehen. In der Natur hat sie (ebenso wie die Complikation) ihre Grenzen. Mathematisch drückt sich diese Begrenzung auf eine endliche Zahl von Gliedern in der Form aus, daß von den immer schwächer werdenden Gliedern der unendlichen Reihe alle bis auf die ersten n-Glieder entfallen. Die Funktion ist dadurch nicht wesentlich verändert. So ist ein Dezimalbruch nicht falsch, wenn ich nur die ersten drei oder fünf Stellen für die Rechnung benutze, und die Zahl $\pi = 3.14$ statt 3.1415926 ... tut in den meisten Fällen ihren Dienst.

Das Entfallen der schwachen Endglieder folgt in der Natur den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit, die jedem der Glieder eine bestimmte Aussicht, in die Erscheinung zu treten, zuteilt. Geht diese Wahrscheinlichkeit unter ein bestimmtes Maß hinab, so wird sie praktisch $= 0$. Die unendliche Reihe reißt ab. Nach der Stärke und der damit verbundenen Wahrscheinlichkeit haben die Glieder der Reihe oder Gruppe eine Rangordnung. So haben die Zahlen in dem Dezimalbruch 3.1415926 ... ihre Rangordnung. Die 9 ist im Rang niedriger als die 5 und die 6 niedriger als die 2. Vernachlässigt man ein Glied, z. B. die 5, so entfallen damit die folgenden.

Konkurrenz der Gesetze in der Natur. Zum Entfallen der schwachen Glieder der Entwicklung in der Natur wirkt noch ein anderes Moment mit: Die Mathematik kann ein Gesetz allein aufstellen und ins Feinste ausarbeiten. In der Natur sind immer mehrere Gesetze in Konkurrenz und stören einander.

Leicht beieinander wohnen die Gedanken,
Doch hart im Raume stoßen sich die Sachen.

Das neue Gesetz zerstört zunächst die schwachen Ausläufer des ersten oder läßt sie nicht zur Entfaltung kommen und rückt, wenn es selber stark ist, dem ersten bis ans Herz hinan. Mathematisch drückt sich das aus durch Entfallen der späteren Glieder der Reihe.

Beispiel. Der Gabelung der Äste und Zweige des Baumes ist eine Grenze gesetzt. Es muß zwischen ihnen Luft sein für Blätter und Blüten. Auch muß jedes Ästchen seine Stärke haben, damit in ihm die Stoffe zirkulieren, die es ernähren.

Die Einschiebung durch Complikation kann mathematisch ins Unendliche gehen. In der Natur muß jedes eingeschobene Glied eine gewisse Breite haben. Wird der Raum zu eng, so hört die Einschiebung auf. In der Natur geht die Einschiebung durch Complikation fast nie über Stufe **3** (C_3) hinaus.

Furkation und Confluenz. Jede mathematische Funktion hat ihre Gegenfunktion (inverse Funktion). Die Gegenfunktion der Furkal-Funktion wollen wir **Confluenzial-Funktion** nennen. Sie hat ihr Bild in der Natur im Zusammenfließen von Rinnsalen, Bächen und Flüssen zu Strömen. Nach Ausbau der Furkal-Funktion ergibt sich die Confluenzial-Funktion als deren Umkehrung. Wir sehen schon in der Figur (Fig. 42), daß das Bild der Confluenz dem der Verästelung durch Furkation gleich ist. Das ist die Eigentümlichkeit der Gegenfunktion.

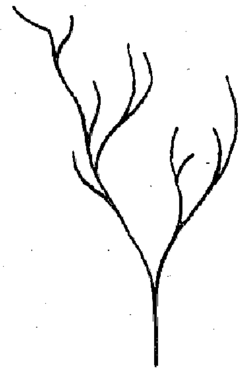


Fig. 42.

Ein **Beispiel** von Furkation und Confluenz zugleich ist das **Adersystem** im Körper. Die weiteren Arterien gabeln sich wiederholt bis zu Kapillaren und die Kapillaren fließen zu weiteren Venen zusammen.

Unser **Zahlensystem,** das sich praktisch in ein Münz- und Maß-System umsetzt, bildet kleinere Einheiten und baut, umgekehrt, größere Einheiten durch Confluenz auf. Der **Architekt** vereinigt durch Confluenz Gebäude und Monumente zu einer einheitlichen Gruppe und gliedert das Einzelwerk durch Furkation und Complikation.

In dem Begriff der **Zahl** liegt Furkation und Confluenz zugleich. Die Zahl 3 faßt drei Einheiten in ein Ganzes zusammen und gliedert zugleich die 3 als Einheit in drei Teile.

Teilung und Gabelung in der Natur. Die einfachste Art der

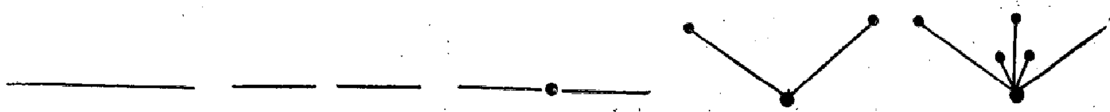


Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46. Fig. 47.

Vermehrung in der Natur ist durch Teilung. Ein Einzelwesen wächst (Fig. 43) und schnürt sich in der Mitte ab, bis die Teile auseinandergehen, jedes seinen Weg (Fig. 44).

Führt die Abschnürung nicht zur Trennung, sondern bleiben die beiden neuen Individuen in der Abschnürungsstelle verbunden und um diese beweglich, so haben wir Gabelung (Fig. 45 u. 46). Innerhalb der Gabel kann sich der Prozeß der Komplikation vollziehen (Fig. 47).

Umformung der harmonischen Zahlenreihen. Manchmal ist in einer Zahlenreihe:

1. $z = z_1 \cdot \cdot z \cdot \cdot \cdot z_2$ **(Allgemeine Form)**

das Gesetz der Complikation enthalten, aber nicht zu erkennen. Erst eine Umformung der Reihe auf die Form:

2. N: $p = 0 \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \infty$ (Form $0 . \infty$ = **Normalform)**

läßt das Gesetz hervortreten. Jede Zahlenreihe: $z = z_1 \cdot \cdot \cdot \cdot z_2$ können wir auf die Form $(0 \cdot \cdot \infty)$ bringen, und zwar durch die Transformation:

3. $$p = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

Umgekehrt können wir unsere Reihe $p = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \infty$ in eine Reihe (z) mit beliebigen gegebenen Endgliedern $z_1 z_2$ umwandeln, und zwar durch die Transformation:

4. $$z = \frac{z_2 p + z_1}{p + 1}$$

Formel **4** berechnet sich aus Formel **3**. Sie ist deren Umkehrung. Sprechen wir von der harmonischen Zahlenreihe, so ist damit, wenn nicht anders gesagt, die Normalform (N) verstanden. Einige andere Formen der Reihe sind wichtig, und es ist der Mühe wert, sich mit ihnen zu beschäftigen. Es sind die folgenden:

2. **Oktavenform:** $N^{II} = (1 \cdot 2)$. Wir haben:

5. $$N^{II}: z^{II} = 1 \cdot \cdot \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \cdot \cdot 2$$

Form $(1 \cdot 2)$ = **Oktavenform.** Wir erhalten aus den Gliedern (z) dieser Reihe die Glieder (p) der Normalreihe (N) durch die Transformation:

6. $p = \frac{z^{II} - 1}{2 - z^{II}}$; umgekehrt ist: **7.** $z^{II} = \frac{2p + 1}{p + 1}$

Diese Reihe N^{II} zeigt sich bei den Schwingungszahlen der harmonischen Töne innerhalb der Oktav. Die Transformation (6), angewendet auf diese Schwingungszahlen (z^{II}), ließ erkennen, daß bei den Tönen in der Musik die selbe Reihe vorliegt, wie bei den Krystallformen in der freien Zone. Die gleiche Oktavenreihe zeigte sich ferner bei den Fraunhofer-Linien des Sonnenspektrums und in der Reihe der Spektralfarben. Die allgemeine Transformation $p = (z - z_1):(z_2 - z)$ ließ das Gesetz in der Entwicklung der Krystallformen erkennen und zugleich die Analogie zwischen der Entwicklung der Töne und Farben. Sie war der Schlüssel, der diese geheimnisvolle Tür aufschloß.

3. **Symmetrische Form:** $N^I = (\bar{1}01)$. Wir haben:

8. N^I. $z^I = \bar{1} \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 1$; Form $(\bar{1}01)$ = **Symmetrische Form.**

Diese Form ist überall da wichtig und von Interesse, wo es sich um Beziehungen zwischen Harmonie und Symmetrie handelt. Sie spielt eine Rolle bei den Krystallformen, aber auch in anderen wichtigen Gebieten der Natur und der Kunst. Wir haben für die Glieder (z^I) dieser Reihe die Transformation:

9. $p = \frac{1+z}{1-z}$; umgekehrt ist: **10.** $z^I = \frac{p-1}{p+1}$

4. **Innere Halbform.** $N^{III} = (0 \cdot 1)$. Wir haben:

11. N^{III}: $z = 0 \cdot \cdot \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdot \cdot 1$. Form $(0 \cdot 1)$ = **Innere Halbform.**

Wir nennen diese Form die innere Halbform, weil sie (obwohl selbst eine ganze Normalreihe) die kleinzahlige Hälfte der nächsthöheren Normalreihe bildet. Die andere, großzahlige Hälfte, nennen wir die äußere Halbform.

Wir haben für die Glieder dieser Reihe die Transformation:

12. $p = \frac{z^{III}}{1 - z^{III}}$. Umgekehrt ist: **13.** $z^{III} = \frac{p}{p+1}$

5. **Äußere Halbform.** $N^{IV} = (1 \cdot \infty)$. Wir haben:

14. N^{IV}: $z = 1 \cdot \cdot \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \infty$. Form $(1 \cdot \infty)$ = **Äußere Halbform.**

Wir haben für die Glieder dieser Reihe die Transformation:

15. $p = z^{IV} - 1$. Umgekehrt ist: **16.** $z^{IV} = p + 1$.

Jede dieser 5 Formen hat ausgezeichnete Eigenschaften, und es ist sehr wohl der Mühe wert, sich mit jeder derselben eingehend zu beschäftigen. Ein paar Eigenschaften mögen hervorgehoben werden:

1. Zwischen der Oktavenform und der Halbform besteht eine merkwürdig einfache Beziehung. Es ist:

$$z^{III} = z^I - 1 \qquad z^I = z^{III} + 1$$

In beiden Reihen N^I und N^{III} haben die Glieder symmetrischen Abstand von Rand und Mitte. Die Mitte bildet die Dominante.

Beispiel.

$$
\begin{array}{lcl}
 & N_3 & = 0 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \infty \\
 & N_3^{I} & = 1 \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{7}{3} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{8}{5} \cdot \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{7}{4} \cdot 2 \\
\text{Rand-Abstand:} & \Delta & = \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \\
 & N_3^{III} & = 0 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot 1
\end{array}
$$

3. **Graphisch** (die Zahlen als Längen aufgetragen) geben für N^{I} und N^{III} das gleiche symmetrische Bild:

Beispiel.

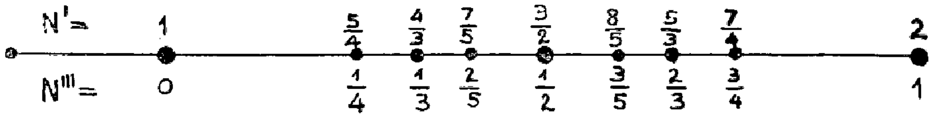


Fig. 48.

Das Bild (Fig. 48) illustriert schön die harmonische Oktavenreihe mit ihren Intervallen und den Höfen bei den Endpunkten und der Dominante.

4. Die Summe zweier symmetrischer Glieder ist in $N^{I} = 3$, in $N^{III} = 1$. Alle Eigenschaften der Reihe in irgend einer Form sind Eigenschaften der Funktion und Eigenschaften von deren Abbild in Natur und Kunst.

Übersicht.

Nr.	Zeichen	Name	Form	Transformation	
1	N^{z}	Allgemeine Form	Form $(z_1 z_2)$	$p = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$	$z = \frac{z_2 p + z_1}{p + 1}$
2	N	Normal-Form	Form $(0 \cdot \infty)$	$p = z$	$z = p$
3	N^{I}	Symmetr. Form	Form $(\bar{1}01)$	$p = \frac{1 + z^{I}}{1 - z^{I}}$	$z^{I} = \frac{p - 1}{p + 1}$
4	N^{II}	Oktaven-Form	Form $(1 \cdot 2)$	$p = \frac{z^{II} - 1}{2 - z^{II}}$	$z^{II} = \frac{2p + 1}{p + 1}$
5	N^{II}	Innere Halbform	Form $(0 \cdot 1)$	$p = \frac{z^{III}}{1 - z^{III}}$	$z^{III} = \frac{p}{p + 1}$
6	N^{v}	Äußere Halbform	Form $(1 \cdot \infty)$	$p = z^{IV} - 1$	$z^{IV} = p + 1$

Jede Reihe, in welcher Form sie auch erscheint, kann der Komplikationsstufe 0 1 2 3 · · · n angehören. Danach haben wir die Reihen:

$$\begin{array}{llllll}
N_0 & N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_n \quad \cdots \\
N_0^{I} & N_1^{I} & N_2^{I} & N_3^{I} & \cdots & N_n^{I} \quad \cdots \\
N_0^{II} & N_1^{II} & N_2^{II} & N_3^{II} & \cdots & N_n^{II} \quad \cdots \\
N_0^{III} & N_1^{III} & N_2^{III} & N_3^{III} & \cdots & N_n^{III} \quad \cdots \\
N_0^{IV} & N_1^{IV} & N_2^{IV} & N_3^{IV} & \cdots & N_n^{IV} \quad \cdots
\end{array}$$

In der Natur und in der Kunst geht, soweit meine Erfahrung reicht, die Entwicklung fast nie über Stufe N_3 hinaus. Wir haben es also praktisch mit einer beschränkten Zahl von Reihen und Formen zu tun, nur mit 16. Wir wollen sie alle explicite anschreiben, damit auch der, der sich mit solchen Reihen nicht viel beschäftigt hat, die harmonische Zahlenreihe und ihre Eigenart in ihren verschiedenen Gestalten wiedererkennt, auch ohne Transformation, und damit er, ohne Gefahr des Irrtums, seine Beispiele wählen und diskutieren kann.

Wir haben:

Normalreihen ($z = p$)

$$\begin{aligned}
N_0 &= 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \infty \\
N_1 &= 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \infty \\
N_2 &= 0 \cdot \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \infty \\
N_3 &= 0 \cdot \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3 \cdot \infty \\
N_4 &= 0 \cdot \cdot \cdot
\end{aligned}$$

Symmetrische Reihen (z^{I})

$$\begin{aligned}
N_0^{I} &= \bar{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1 \\
N_1^{I} &= \bar{1} \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 1 \\
N_2^{I} &= \bar{1} \cdot \cdot \tfrac{\bar{1}}{3} \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \cdot 1 \\
N_3^{I} &= \bar{1} \cdot \tfrac{\bar{1}}{2}\ \tfrac{\bar{1}}{3}\ \tfrac{\bar{1}}{5}\ 0\ \tfrac{1}{5}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2} \cdot 1 \\
N_4^{I} &= \cdot \cdot \cdot
\end{aligned}$$

Oktavenreihen (z^{II})

$$\begin{aligned}
N_0^{II} &= 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2 \\
N_1^{II} &= 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot 2 \\
N_2^{II} &= 1 \cdot \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{3} \cdot \cdot 2 \\
N_3^{II} &= 1 \cdot \tfrac{5}{4}\ \tfrac{4}{3}\ \tfrac{7}{5}\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{8}{5}\ \tfrac{5}{3}\ \tfrac{7}{4} \cdot 2 \\
N_4^{II} &= \cdot \cdot \cdot
\end{aligned}$$

Innere Halbreihen (z^{III})

$$\begin{aligned}
N_0^{III} &= 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1 \\
N_1^{III} &= 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot 1 \\
N_2^{III} &= 0 \cdot \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \cdot 1 \\
N_3^{III} &= 0 \cdot \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{5}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{5}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{3}{4} \cdot 1 \\
N_4^{III} &= \cdot \cdot
\end{aligned}$$

Äußere Halbreihen (z^{IV})

$$\begin{aligned}
N_0^{IV} &= 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \infty \\
N_1^{IV} &= 1 \cdot \cdot \cdot \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \infty \\
N_2^{IV} &= 1 \cdot \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \infty \\
N_3^{IV} &= 1 \cdot \tfrac{4}{3}\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{5}{3}\ 2\ \tfrac{5}{2}\ 3\ 4 \cdot \infty \\
N_4^{IV} &= \cdot \cdot \cdot \cdot
\end{aligned}$$

Relationen. Zwischen den Gliedern der verschiedenen Reihen bestehen die folgenden einfachen Relationen:

Relationen.

$$p = \frac{1+z^{\mathrm{I}}}{1-z^{\mathrm{I}}} = \frac{z^{\mathrm{II}}-1}{2-z^{\mathrm{II}}} = \frac{z^{\mathrm{III}}}{1-z^{\mathrm{III}}} = z^{\mathrm{IV}}-1$$

$$\frac{p-1}{p+1} = z^{\mathrm{I}} = 2z^{\mathrm{II}}-3 = 2z^{\mathrm{III}}-1 = \frac{z^{\mathrm{IV}}-2}{z^{\mathrm{IV}}}$$

$$\frac{2p+1}{p+1} = \frac{3+z^{\mathrm{I}}}{2} = z^{\mathrm{II}} = z^{\mathrm{III}}+1 = \frac{2z^{\mathrm{IV}}-1}{z^{\mathrm{IV}}}$$

$$\frac{p}{p+1} = \frac{1+z^{\mathrm{I}}}{2} = z^{\mathrm{II}}-1 = z^{\mathrm{III}} = \frac{z^{\mathrm{IV}}-1}{z^{\mathrm{IV}}}$$

$$p+1 = \frac{2}{1-z^{\mathrm{I}}} = \frac{1}{2-z^{\mathrm{II}}} = \frac{1}{1-z^{\mathrm{III}}} = z^{\mathrm{IV}}$$

Die Relationstabelle setzt uns in den Stand, jede Zahl einer Reihe in die entsprechende einer andern Reihe umzurechnen.

Umkehrung. Reversion. Jede unserer 5 Formen läßt sich umkehren, d. h. das Anfangsglied läßt sich zum Endglied machen, zugleich das Endglied zum Anfangsglied. Das geschieht bei der Normalform durch die Transformation:

$$\underline{N} : \underline{p} = \frac{1}{p}$$

Beispiel.

$N_2 = 0 \ \tfrac{1}{2} \ 1 \ 2 \ \infty$ $\qquad$ $N_2^{\mathrm{I}} = \bar{1} \ \bar{\tfrac{1}{3}} \ 0 \ \tfrac{1}{3} \ 1$

$\underline{N}_2 = \infty \ 2 \ 1 \ \tfrac{1}{2} \ 0$ $\qquad$ $\underline{N}_2^{\mathrm{I}} = 1 \ \tfrac{1}{3} \ 0 \ \bar{\tfrac{1}{3}} \ \bar{1}$

Bei der Umkehrung erscheinen bei jeder der 5 Formen die gleichen Zahlen in umgekehrter Folge. Wir unterscheiden bei jeder der 5 Formen eine steigende und eine fallende Variante. Wir haben:

	Steigend	Fallend	
N	Form $(0 \cdot \infty)$	Form $(\infty \cdot 0)$	N
N^{I}	Form $(\bar{1}01)$	Form $(10\bar{1})$	N^{I}
N^{II}	Form $(1 \cdot 2)$	Form $(2 \cdot 1)$	N^{II}
N^{III}	Form $(0 \cdot 1)$	Form $(1 \cdot 0)$	N^{III}
N^{IV}	Form $(1 \cdot \infty)$	Form $(1 \cdot \infty)$	N^{IV}

Ferner ändert sich der Charakter der Reihe nicht durch Vertauschung aller Vorzeichen $\pm$. Die steigende und die fallende Gestalt betrachten wir als Varianten der gleichen Form.

Geometrische Bedeutung der Umformung (Transformation). Die Umformung bedeutet eine Änderung des Anfangs und eine Änderung des Einheitsmaßes, oder Projektion auf eine andere Linie.

Beispiel. Wir haben ein harmonisches Vektoren-Bündel bei Projektion auf eine Gerade A C ∥ M B (Fig. 49), dargestellt durch die Reihe $0\,\frac{1}{2}\,1\,2\,\infty$. Dasselbe Bündel liefert die symmetrische Reihe $\bar{1}\,\bar{\frac{1}{3}}\,0\,\frac{1}{3}\,1$ bei Projektion auf eine Gerade durch A B. Das Bündel ist das gleiche; das Gesetz tritt aber (in Zahlen) bei der Umformung in die Gestalt $0 \cdot \cdot \infty$ klarer hervor.

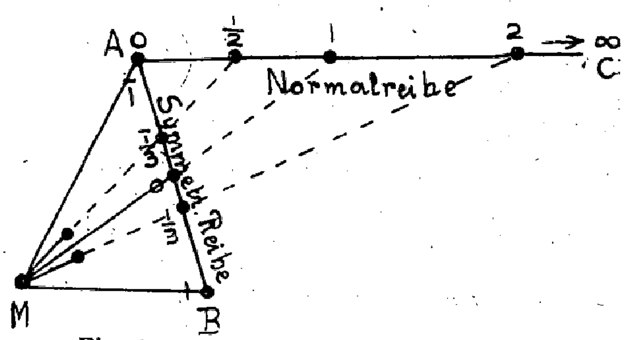


Fig. 49.

Die Transformation ist der Prüfstein (Kriterium), ob die Zahlenreihe eine harmonische ist, ob in ihr das Gesetz der Komplikation steckt. Steckt das Gesetz nicht in der Reihe, so führt keine Transformation zu einer der Normalreihen $N\ N^{I}\ N^{II} \cdot \cdot$. Auf diese Weise gibt die Transformation die Handhabe zu einer Diskussion und Kritik.

Inversions-Formeln. Um die steigenden Formen der Reihe, Glied für Glied, in die fallenden Formen überzuführen und umgekehrt, dienen einfache Formeln, die sich leicht berechnen lassen. Wir nennen sie Umkehrungs-Formeln und wollen sie in der folgenden Tabelle anschreiben.

Sei z ein Glied einer steigenden Reihe, so sei das entsprechende Glied der fallenden Reihe $= \underline{z}$. Wir haben:

Inversions-Formeln.

Normal-Form	$N\ (0 \cdot \infty)$	$\underline{z} = \frac{1}{z}$	$z = \frac{1}{\underline{z}}$	$\underline{N}\ (\infty \cdot 0)$
Symmetr. Form	$N^{I}\ (\bar{1}01)$	$\underline{z}^{I} = -z^{I}$	$z^{I} = -\underline{z}^{I}$	$\underline{N}^{I}\ (10\bar{1})$
Oktaven-Form	$N^{II}\ (1 \cdot 2)$	$\underline{z}^{II} = 3 - z^{II}$	$z^{II} = 3 - \underline{z}^{II}$	$\underline{N}^{II}\ (2 \cdot 1)$
Innere Halbform	$N^{III}\ (0 \cdot 1)$	$\underline{z}^{III} = 1 - z^{III}$	$z^{III} = 1 - \underline{z}^{III}$	$\underline{N}^{III}\ (1 \cdot 0)$
Äußere Halbform	$N^{IV}\ (1 \cdot \infty)$	$\underline{z}^{IV} = \frac{z^{IV}}{z^{IV} - 1}$	$z^{IV} = \frac{\underline{z}^{IV}}{\underline{z}^{IV} - 1}$.	$\underline{N}^{IV}\ (\infty \cdot 1)$

Reziproke Reihen. Wir sehen: Die beiden Reihen N^n und $\underline{N}^n$ werden gegenseitig durch die gleiche Formel ineinander übergeführt. Komplexe, die diese Eigenschaft haben, wollen wir reziprok nennen. Es sind sowohl die Reihen als Ganzes, wie jedes Glied der Reihe reziprok.

Dadurch erweitert sich der Begriff der Reziprozität. Die Beziehung $\underline{z} = \frac{1}{z}$ und $z = \frac{1}{\underline{z}}$ $\left(\text{z. B. tg} = \frac{1}{\text{ctg}}\right)$ bildet einen speziellen Fall der Reziprozität.

Andere Beispiele eines reziproken Paares sind:

$$\underline{z} = \frac{z+1}{z-1}; \quad z = \frac{\underline{z}+1}{\underline{z}-1}.$$

$$\underline{z} = \frac{1}{2z}; \quad z = \frac{1}{2\underline{z}}; \quad \text{allgemeiner } \underline{z} = \frac{\pm 1}{nz}; \quad z = \frac{\pm 1}{n\underline{z}}$$

Erstere Transformation ist wichtig in der Formenlehre der Krystallographie, letztere in der Musiklehre. Sie verknüpft die harmonischen Zahlen von **Dur** und **Moll.** In ihr kommt die Reziprozität von Dur und Moll zum Ausdruck. Dies wird an anderer Stelle dargelegt.

Reziproke Funktionen. Ich weiß nicht, ob in der Mathematik der Begriff der reziproken Komplexe und Funktionen (in obigem Sinn) eingeführt und ausgebildet ist. Wenn nicht, so wäre zu prüfen, welche Eigenschaften ein Komplex oder eine Funktion haben muß, um eine reziproke Gegenfunktion zu besitzen. Es dürften die reziproken Funktionen berufen sein, wesentlich in die Naturwissenschaften einzugreifen, ebenso in die Kunstwissenschaft. Alles Symmetrische ist reziprok. In der Musik sind Dur und Moll reziprok und wir können a priori aussagen, daß die beide verknüpfenden Funktionen reziproke sind, auch wenn wir noch nicht in der Lage sind, dieselben aufzustellen.

Spaltung der Normalreihen. In jeder der Normalreihen N^n sind alle vorhergehenden Normalreihen $(N_{n-1} N_{n-2} \cdots N_3 N_2 N_1 N_0)$ enthalten. Wir gewinnen jede vorhergehende Normalreihe aus der folgenden auf doppelte Weise:

1. Durch Weglassen jedes zweiten Gliedes.

2. Durch Spaltung bei der Dominante (1) und Umformung jeder Hälfte auf die Form $0 \cdots \infty$.

Ad 1. Weglassen jedes zweiten Gliedes. Wir haben:

Beispiel. $N_3 = 0 \; (\frac{1}{3}) \; \frac{1}{2} \; (\frac{2}{3}) \; 1 \; (\frac{3}{2}) \; 2 \; (3) \; \infty$

Durch Weglassen jedes zweiten Gliedes erhalten wir:

$$N_2 = 0 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \infty$$

Ad 2. Spaltung bei der Dominante (1). Wir haben:

Beispiel. $N_3 = 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3\ \infty$

Wir spalten bei der Dominante (1) und erhalten:

1. Teil: $z = 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1;\quad p = \frac{z}{1-z} = 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$

2. Teil: $z = 1\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3\ \infty;\quad p = z - 1 = 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$

So spaltet sich eine Reihe N_3 in 2 Reihen N_2, allgemein jede Reihe N_n in 2 Reihen N_{n-1}.

Solche Spaltung der Reihen und die sich daran knüpfende Diskussion spielt eine wichtige Rolle bei den Zahlenreihen der Krystallographie (vgl. Zeitschr. f. Kryst. 1897. 28. 24 flg.); aber auch in anderen Gebieten hat sie sich bewährt. So bei den Sonnendistanzen der Planeten und den Planetdistanzen der Satelliten (vgl. Ann. Nat. Philos. 1906. 5. 51—110). Die Spaltung im Verein mit der Transformation ist ein wichtiges Mittel zur Diskussion der Zahlenreihen.

Es ist eine merkwürdige Eigenschaft der Reihen **N**, daß die Weglassung jedes zweiten Gliedes und die Spaltung bei der Dominante zum Gleichen führt.

Wir schreiben die Spaltung in der Form:

$$N_3: z = 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3\ \infty$$

$$\text{Spaltung: } \frac{z}{1-z} = 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty . 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty = z - 1$$

Wollen wir den beiden Hälften nach der Spaltung symmetrische Form geben, so können wir schreiben:

$$\text{Spaltung: } \frac{1-z}{z} = \infty\ 2\ 1\ \tfrac{1}{2}\ 0 \cdot 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty = z - 1$$

Die Spaltungsformel ist nichts anderes als unsere allgemeine Transformationsformel:

$p = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$, wobei für die erste Hälfte $z_1 = 0;\ z_2 = 1$ ist,
für die zweite Hälfte $z_1 = 1;\ z_2 = \infty$

Daß es möglich ist, jede Reihe N_n in zwei gleiche und, wenn man will, symmetrische Reihen zu spalten, ist eine merkwürdige Eigenschaft der Funktion. Wir können allgemein schreiben:

$N_n = N_{n-1} + N_{n-1}$ z. B. $N_3 = N_2 + N_2$ oder symmetrisch:
$N_3 = {}_2N + N_2$ oder $N_3 = {}_2N_2$; N_2 ist die Hälfte von N_3.

Anmerkung. Die Spaltung kann mit einer Division durch 2 verglichen werden. Eine Teilung in 3 . 5 . . . . . n gleichgebaute Teile kann aber bei ihr nicht geschehen. Nur Halbieren. Das liegt an der zweiseitigen Symmetrie der Reihe.

Analogon. Ich kann jedes räumliche Gebilde, jedes Wesen mit einer Symmetrieebene in zwei gleiche Hälften spalten. Merkwürdig bei unserer Funktion ist, daß die Spaltung in jede der beiden Hälften eine neue Symmetrieebene bringt, die wieder eine Spaltung in zwei gleichgebaute Reihen ermöglicht. Das hat seine Analogie in der Vermehrung der Lebewesen durch Abspaltung. Jedes abgespaltene neue Lebewesen erhält die Symmetrieverhältnisse des Ursprünglichen.

Außer der **zweiseitigen Symmetrie** ist eine drei-, vier-, sechsseitige denkbar. Sie kommt in der Natur z. B. bei den Krystallen vor und es kann eine ihr entsprechende mathematische Funktion gedacht werden.

Die Analogie unserer Funktion mit den Entwicklungsvorgängen bei den Lebewesen (Tieren und Pflanzen) ist keine auffällige. Wir werden immer mehr erkennen, wie die Complikations-Funktion die Entstehung, Vermehrung und Entwicklung der Mannigfaltigkeiten in der Natur beherrscht. Diese Eigenschaft hat keine mir bekannte mathematische Funktion. Die Complikations-Funktion dürfte daher berufen sein, in die Mechanik auch des Organischen einzugreifen.

Umkehrung. Jede mathematische Funktion setzt die Möglichkeit der umgekehrten Funktion voraus. Damit ist nicht gesagt, daß die umgekehrte Operation jedesmal ebenso leicht auszuführen ist. Der Abstieg kann leichter oder schwerer sein als der Aufstieg.

Ist es möglich die Reihe $\mathbf{N}_n$ in zwei Reihen $\mathbf{N}_{n-1}$ zu spalten, so ist es auch denkbar, $\mathbf{N}_n$ aus zwei Reihen $\mathbf{N}_{n-1}$ zusammenzulegen. Diese Zusammenlegung ist in der Tat ausführbar; wir wollen sie Koppelung (Copulation) nennen.

Copulation (Koppelung) sei das Zusammenstoßen von zwei Reihen $\mathbf{N}_{n-1}$ zu einer gemeinsamen Reihe $\mathbf{N}_n$. Das Schema ist wieder:

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{N}_{n-1} + \mathbf{N}_{n-1} \quad \text{z. B.} \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2 \quad \text{oder} \quad = {}_2\mathbf{N} + \mathbf{N}_2$$

Copulation ist die Gegenoperation der Spaltung. Will ich zwei Reihen $\mathbf{N}_n$ parallel zu einer Reihe $\mathbf{N}_{n+1}$ zusammenstoßen (koppeln), so geschieht dies durch die beiden Operationen:

$$\text{links: } z^1 = \frac{z}{z+1}; \quad \text{rechts: } z^1 = z + 1$$

Beispiel.

Parallele Copulation: $N_2 + N_2 = 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty \cdot 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty = z$

$$N_3 = \frac{z}{z+1} = 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1 \cdot 1\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3\ \infty = z + 1$$

Symmetrisches Zusammenstoßen geschieht nach den Formeln:

links: $z^1 = \frac{1}{1-z}$; rechts: $z^1 = z + 1$

Beispiel.

Symmetrische Copulation.

$${}_2N + N_2 = \infty\ 2\ 1\ \tfrac{1}{2}\ 0 \cdot 0\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty = z$$

$$N_3 : = \frac{1}{1-z} = 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1 \cdot 1\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3\ \infty = z + 1$$

Beim Koppeln der beiden Reihen verdoppelt sich der Vereinigungspunkt $p = 1$. Das entspricht seinem Wesen. Der Symmetriepunkt (1) der Reihe ist sich selbst reziprok und sich selbst symmetrisch. Das gibt ihm das doppelte Gewicht, verstärkt seine Bedeutung und macht ihn zur Dominante.

Zum Zweck der symmetrischen Koppelung haben wir die eine der beiden parallelen Reihen umzukehren (vgl. S. 66). Die symmetrische Koppelung dürfte den Vorgängen in der Natur am besten entsprechen.

Geometrische Darstellung der Koppelung zur Reihe nächsthöherer Stufe. Wir wollen die Copulationen:

$${}_0N + N_0 = N_1;\ {}_1N + N_1 = N_2;\ {}_2N + N_2 = N_3$$

geometrisch durchführen. Daraus ergibt sich der allgemeine Fall. Zu diesem Zweck schreiben wir genannte Reihen in zwei Formen an. In Normalform und in symmetrischer Form. Wir haben:

Normalform.	**Symmetrische Form.**
$N_0 = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \infty$	$N_0 = \bar{1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$
$N_1 = 0 \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot \infty$	$N_1 = \bar{1} \cdot \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \cdot 1$
$N_2 = 0 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \infty$	$N_2 = \bar{1} \cdot \tfrac{\bar{1}}{3} \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1$
$N_3 = 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ 1\ \tfrac{3}{2}\ 2\ 3\ \infty$	$N_3 = \bar{1}\ \tfrac{\bar{1}}{2}\ \tfrac{\bar{1}}{3}\ \tfrac{\bar{1}}{5}\ 0\ \tfrac{1}{5}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{2}\ 1$

Wir wollen je zwei gleiche Reihen symmetrisch in der Normalform zusammenstoßen. Zunächst die einfachsten. So haben wir:

Copulation 1. ${}_0N + N_0 = N_1$ (Fig. 50).

Die Vektoren ($MA = a$ und $MB = b$) bilden eine Gabel, d. h. eine Reihe N_0. Auch die Vektoren $MA = a$ und $MB' = b$ bilden eine Gabel, d. h. eine Reihe N_0. In normaler Projektion bildet sich eine Gabel a b auf einer Geraden A C ‖ MB ab und liefert die Punkte $A = 0$ und $C = \infty$, somit die Reihe $N_0 = 0\,\infty$. Die Gabel a b' bildet sich auf $A\bar{C}$ ‖ MB' ab und bildet die Reihe ${}_0N = \bar{\infty}\,0$. Wir stoßen beide Gabeln zusammen, so daß die beiden M A zusammenfallen und erhalten nun als Summe die trifurkale Gruppe:

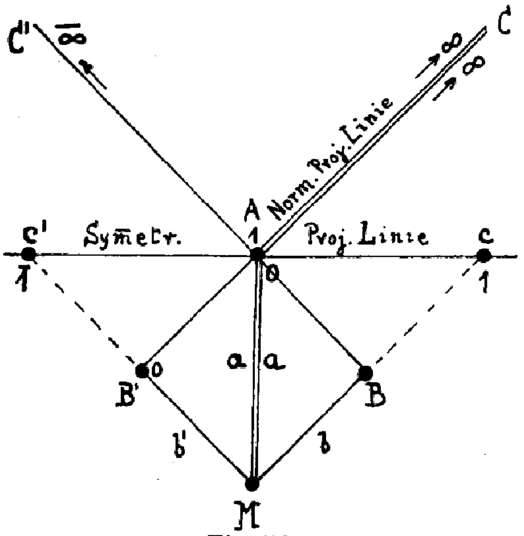


Fig. 50.

MB · MA · MB'.

Diese bildet sich auf der symmetrischen Projektionslinie c' A c in den Punkten c' A c ab. Nehmen wir als Einheitsmaß $cA = Ac' = 1$, so haben wir die Reihe:

$N_1{}^I = \bar{1}01$ in symmetrischer Form.

Wollen wir dieser Reihe die Normalform geben, so verlängern wir C A bis B' und erhalten für die 3 Vektoren, wenn wir den 0 Punkt nach B' verlegen und als Einheitsmaß $B'A = MB' = MB$ nehmen, die Reihe: $B'AC = 0\,1\,\infty = N_1$.

Wir sehen: Die erste Complikation $N_1 = 0\,1\,\infty$ setzt sich aus zwei Gabelungen zusammen. Wir wollen die einfache Gabelung **Bifurkation** nennen, die erste Complikation **Trifurkation.** Beide spielen in der Natur eine große Rolle.

Copulation 2. ${}_1N + N_1 = N_2$ (Fig. 51).

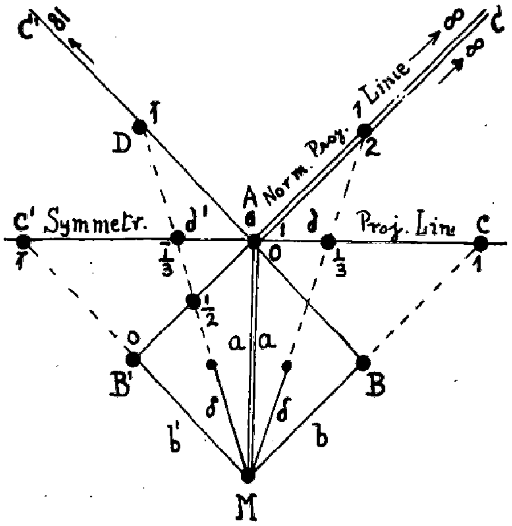


Fig. 51.

Wir wollen auch dies Beispiel ausführlich darlegen. Die drei Vektoren a d b bilden eine trifurkale Gabel, eine Reihe N_1. Auch die Vektoren a d' b bilden eine trifurkale Gabel, eine Reihe N_1. In normaler Projektion bildet sich die Gabel $AMB = adb$ auf einer Geraden A C ‖ MB ab. Sie liefert die Punkte $A = 0$, $D = 1$ und $C = \infty$, somit die Reihe $0\,1\,\infty = N_1$. Die Gabel $AMB' = ad'b'$ bildet sich auf A C ‖ MB' ab in den Punkten $A = 0$; $D' = \bar{1}$; $C' = \bar{\infty}$. Sie liefert somit die Reihe $\bar{\infty}\,\bar{1}\,0 = {}_1N$.

Wir stoßen beide Gabeln zusammen, so daß beide Vektoren M A zusammenfallen und erhalten nun als Summe die fünfgliederige Gruppe: b d a d' b'. Sie bildet sich auf der symmetrischen Projektionslinie in den Punkten c' d' A d c ab. Nehmen wir als Einheitsmaß $c'A = Ac = 1$, so haben wir $Ad' = \frac{\bar{1}}{3}$, $Ad = \frac{1}{3}$ und wir erhalten die Reihe

$$N_2' = \bar{1}\ \tfrac{\bar{1}}{3}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ 1 \text{ in symmetrischer Form.}$$

Wollen wir dieser Reihe die **Normalform** geben, so verlängern wir C A bis B' und erhalten für die 5 Vektoren, wenn wir den Nullpunkt nach B' verlegen und als Einheitsmaß $B'A = MB' = MB = b = 1$ nehmen, die Reihe: $B'AC = N_2 = 0\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$. Wir sehen, die zweite Complikation $N_2 = 0\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$ setzt sich aus zwei trifurkalen Gabelungen, d. h. aus zwei Reihen $N_1 = 0\ 1\ \infty$ zusammen.

Mechanisch betrachten wir die Vektoren als gerichtete Kräfte von bestimmtem Maß, in der Krystallographie als Partikelkräfte und zugleich als Flächennormalen. Auch in der belebten Natur haben die Vektoren und ihre Gruppen ihr Äquivalent. Es wird unsere Aufgabe sein, mit dem Ausbau der Funktion (algebraisch und geometrisch) deren Äquivalent auszubauen.

Beispiel 3. Copulation 3. ${}_2N + N_2 = N_3$ (Fig. 52).

Wir wollen auch dieses Beispiel ausführlich darlegen. Das empfiehlt sich, weil die Verhältnisse (wie die Figur zeigt) schon recht compliziert sind Mit diesem Beispiel dürfte der allgemeine Fall klargelegt sein.

Wir kommen so bis zu der Normalreihe N_3. Diese ist uns von dem größten Interesse und es ist uns von besonderer Wichtigkeit, uns mit ihr zu befassen, weil sie (mit wenigen Ausnahmen) die Grenze bildet, die die Natur bei der Bildung ihrer harmonischen Complikationen nicht überschreitet.

Warum sie das nicht tut, ist durch das geometrische Bild Fig. 52 hübsch illustriert. Alles rückt so eng zusammen, daß bei weiteren Einschiebungen die Gefahr besteht, daß die reinliche Scheidung versagt. Wir kommen in der Natur, wie in der Kunst (Musik und Farben) bei N_4 in den Zustand der Überfeinerung. Zur Temperierung bei den Tönen, zu den Mischfarben in der Kunst.

Wir kehren zu unserem Spezialfall der **Copulation** 3 in geometrischer Form zurück.

Die 5 Vektoren $\alpha\, \varepsilon\, \delta\, \zeta\, b$ (Fig. 52) bilden ein fünfstrahliges harmonisches Bündel, eine Reihe N_2. Auch die 5 Vektoren $\alpha\, \varepsilon'\, \delta'\, \beta'\, b'$ bilden ein solches Bündel N_2. In normaler Projektion bildet sich das erstere Bündel auf einer Projektionslinie $AC \parallel MB$ ab. Es liefert die Punkte $A = 0$; $E = \frac{1}{2}$; $D = 1$; $F = 2$; $C = \infty$, somit die Reihe $N_2 = 0\, \frac{1}{2}\, 1\, 2\, \infty$. Das Bündel $AMB' = \alpha\, \varepsilon'\, \delta'\, \zeta'\, b'$ bildet sich auf $AC' \parallel MB'$ ab in den Punkten $A' = 0$; $E' = \frac{\bar{1}}{2}$; $D' = \bar{1}$; $F' = \bar{2}$; $C' = \bar{\infty}$, bildet somit die Reihe: $\bar{\infty}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \frac{\bar{1}}{2}\ 0 = {}_2N$.

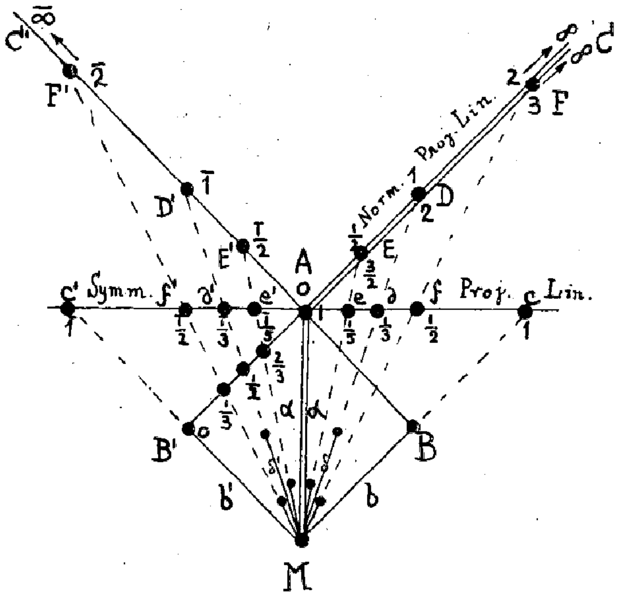


Fig. 52.

Wir stoßen nun beide Bündel zusammen, so daß die Vektoren $MA = \alpha$ beider Bündel sich decken und erhalten nun als Summe die 9gliederige Gruppe: $b\, \zeta\, \delta\, \varepsilon\, \alpha\, \varepsilon'\, \delta'\, \zeta'\, b'$. Diese bildet sich auf der symmetrischen Projektionslinie in den Punkten $c\, f\, d\, e\, A\, e'\, d'\, f'\, c'$ ab. Nehmen wir als Einheitsmaß $cA = Ac' = 1$, so haben wir:

$c'A = 1$; $f'A = \frac{\bar{1}}{2}$; $d'A = \frac{\bar{1}}{3}$; $e'A = \frac{\bar{1}}{5} \cdots Ae = \frac{1}{5}$; $Ad = \frac{1}{3}$; $Af = \frac{1}{2}$; $Ac = 1$

und wir erhalten die symmetrische Reihe:

$$N_3' = 1\ \frac{\bar{1}}{2}\ \frac{\bar{1}}{3}\ \frac{\bar{1}}{5}\ 0\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 1$$

Wollen wir dieser Reihe die Normalform geben, so verlängern wir CA bis B' und erhalten für die 9 Vektoren, wenn wir den Nullpunkt nach B' verlegen und als Einheit $B'A = MB' = MB = b = 1$ nehmen, die Reihe:

$$N_3 = 0\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ 1\ \frac{3}{2}\ 2\ 3\ \infty.$$

Wir sehen, die 3. Complikation N_3 setzt sich aus 2 Bündeln $N_2 = 0\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ \infty$ durch Copulation zusammen.

In der gleichen Weise können wir 2 Reihen N_3 zu einer Reihe N_4 durch Copulation zusammenstoßen. Allgemein eine Reihe N_n aus 2 Reihen N_{n-1}. D. h.: auch die kompliziertesten Reihen lassen sich durch wiederholte Gabelung und Copulation aufbauen, ebenso wie durch unsere Differenzierung nach dem Complikationsgesetz. Beide Bildungswege führen zu dem gleichen Resultat.

Copulation. Allgemeiner Fall. Wir wollen nun das Zusammenstoßen zweier Reihen zu einer nächst höheren Reihe

$$_nN + N_n = N_{n+1}$$

geometrisch darstellen. Das ist der allgemeine Fall der Copulation. Wegen seiner Wichtigkeit wollen wir ihn ausführlich geben.

Es sollen die beiden Reihen

$$_nN = \overline{\infty} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 0 = c'A \text{ und}$$
$$N_n = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \infty = AC$$

zusammengestoßen (copuliert) werden, d. h. es sollen die beiden harmonischen Bündel $b'\,\delta'\,\alpha$ und $\alpha\,\delta\,b$ in ein Bündel vereinigt werden (Fig. 53). Geometrisch geschieht das dadurch, daß wir die Vektoren beider Bündel in α zusammenfallen lassen und gemeinsam auf eine Linie B' A C (oder B A C') projizieren. Dabei behält jeder Vektor (δ) des Bündels A M B seinen Projektionspunkt D auf A C bei. Aber der Zählungsanfang (0) wird von A nach B' verlegt. B' erhält nun die harmonische Zahl $p = 0$; A die Zahl $z^{IV} = 1$, d. h.: A C mit seinen Punkten (bisher $0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \infty$) wird zur äußeren Hälfte $(1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \infty)$ der Normalreihe N_{n+1}. Wir haben die Transformation:

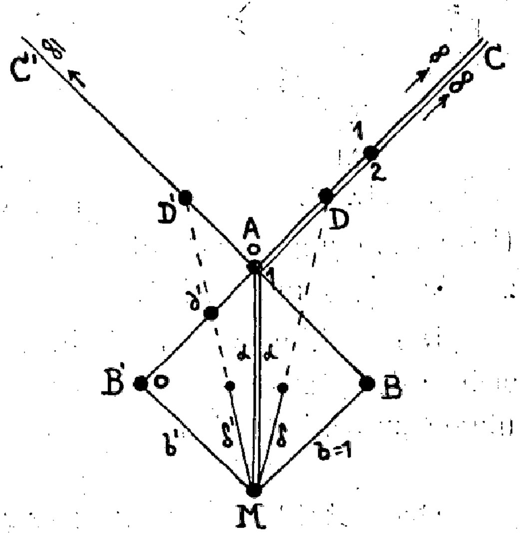


Fig. 53.

$$z^{IV} = p + 1 \qquad p = z^{IV} - 1$$

Das Bündel B' M A war auf C' A projiziert und bildete die Reihe $(\infty \cdot 0)$. Es soll nun auf die Gerade B' A projiziert werden, wobei $B' = 0$, $A = 1$ wird. Die Länge B' A ist $= 1$. Das Bündel B' M A, auf B' A projiziert, bildet somit die innere Hälfte $(0 \cdot 1)$ der Normalreihe B' A C. Der Vektor δ', der auf A C' in D' projiziert war, projiziert sich auf B' A in d'. Dann ist:

$$B'd' = z''' \qquad dA = 1 - z'''$$

Damit der Punkt C' dem Punkt B' korrespondiere, A an seinem Ort bleibe, ist zunächst die Reihe $C'A = (\overline{\infty} \cdot 0)$ zu transformieren in $C'A = (0 \cdot \infty)$. Wir nannten das I n v e r s i o n. Dann verwandelt sich:

$$Ad = p \qquad \text{in} \qquad Ad' = \frac{1}{p}$$

An Stelle von $\frac{1}{2}$ steht dann 2. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke D' d' A und M d' B' (Fig. 54) folgt:

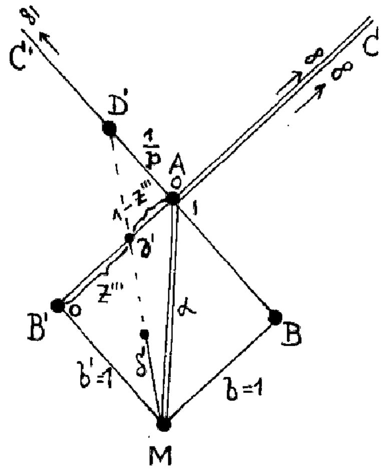


Fig. 54.

$$D'A : MB' = d'A : d'B'$$

$$\frac{1}{p} : 1 \quad = (1 - z^{III}) : z^{III}$$

daher $p = \frac{z'''}{1 - z'''}$

Wir sehen: die Copulation führt zu unseren Transformationsformeln

$$p = z^{IV} - 1 \qquad p = \frac{z'''}{1 - z'''}$$

Wir haben jetzt das Mittel, beliebig aus der analytischen Behandlung der Copulation und der Spaltung in die geometrisch-mechanische überzugehen und umgekehrt.

Die Rechnung ist einfach, doch erfordert es einige Übung, um sich in den Zusammenhängen und den entsprechenden Naturerscheinungen zurechtzufinden.

Geometrische Deutung der Transformationen. Wir wollen im Folgenden das geometrische Äquivalent unserer 5 Transformationen ableiten.

1. Transformation N² : N (allgemeine Form N^z): $p = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$

Es erscheinen (in Fig. 55) auf AC ‖ MB die harmonischen Zahlen p als Längen von A aus, so daß für einen beliebigen Strahl (ε) AE : AD = AE : MB = p ist. AC ‖ MB nennen wir die parallele Projektionslinie.

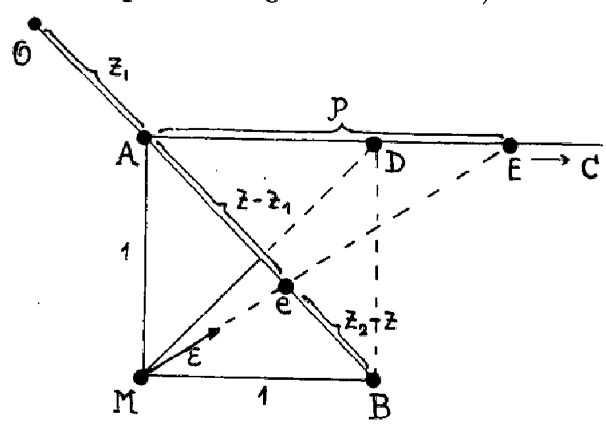


Fig. 55.

Wir legen eine neue Projektionslinie durch AB. Wir nennen sie die **diagonale Projektionslinie.** Auf ihr bilden sich die Zahlen des harmonischen Bündels zwischen MA und MB ab als Entfernungen von einem beliebigen Endpunkt O. Dabei ist:

$$OA = z_1 \qquad OB = z_2$$

Für einen beliebigen Strahl ME mit dem Durchstich e in AB ist:

$Oe = z \quad Ae = z - z_1 \quad eB = z_2 - z \quad AE:AD = AE:MB = p$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AeE und BeM folgt:

$$p = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

2. Transformation $N^I : N$ (symmetrische Form): $p = \frac{1 + z^1}{1 - z^1}$

In Fig. 56 haben die Linien und Buchstaben die selbe Bedeutung wie in Fig. 55. Doch ist der Anfang der Zählung von z' in den Punkt d verlegt, den Projektionspunkt der Dominante. Dann haben wir für einen beliebigen Strahl ME mit dem Schnittpunkt e in AB:

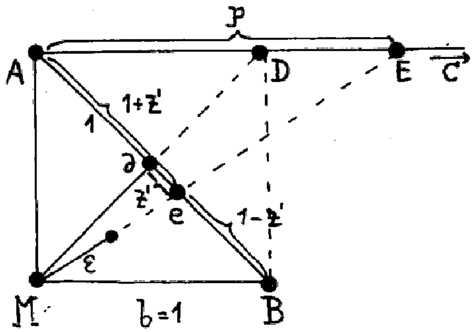


Fig. 56.

$Ad = dB = 1 \quad de = z' \quad Ae = 1 + z' \quad eB = 1 - z'$
wobei: $AE:MB = p$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AeE und BeM folgt:

$$p = \frac{1 + z^1}{1 - z^1}$$

3. Transformation $N^{II} : N$ (Oktavenform); $p = \frac{z'' - 1}{2 - z''}$

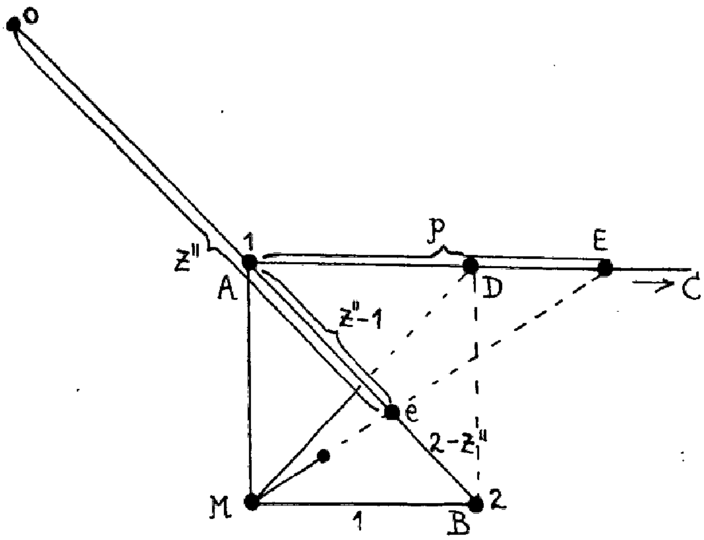


Fig. 57.

In Fig. 57 ist auf der Diagonalen AB der Anfang der Zählung nach O verlegt, wobei:

$$OA = AB = 1 \qquad OB = 2$$

Dann ist: $Oe = z''$; $Ae = z'' - 1$; $eB = 2 - z''$; $AE : MB = p$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AeE und BeM folgt:

$$p = \frac{z'' - 1}{2 - z''}$$

4. Transformation $N^{III} : N$ (innere Halbform): $p = \frac{z'''}{1 - z'''}$.

In Fig. 58 ist der Anfang der Zählung auf der Diagonale AB in den Punkt $A = 0$ gelegt und es ist $AB = 1$ zur Einheit gemacht. Dann ist für einen beliebigen Strahl ME mit dem Durchstich e in AB:

$AB = 1$; $Ae = z^{III}$; $eB = 1 - z^{III}$; $AE : MB = p$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AeE und BeM folgt:

$$p = \frac{z'''}{1 - z'''}$$

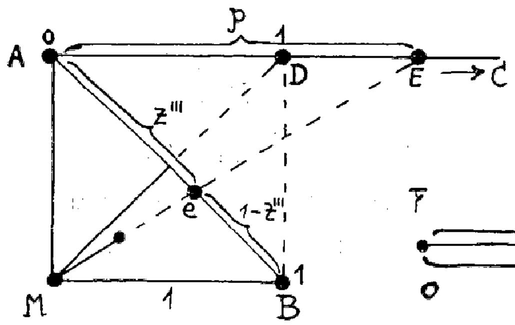


Fig. 58.

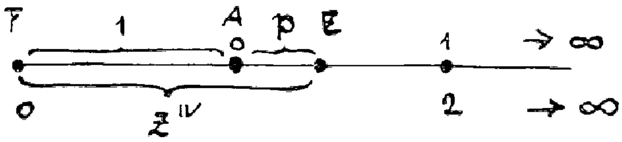


Fig. 59.

5. Transformation $N^{IV} : N$ (äußere Halbform): $p = z^{IV} - 1$.

Die Transformation besteht in einer Verlegung des Anfangs der Zählung auf AC von $A = 0$ nach $F = -1$ (Fig. 59). Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$p = z^{IV} - 1$$

Bifurkation und Trifurkation.

Der Complikation muß, wie wir gesehen haben, eine Gabelung vorausgehen, wenn Mannigfaltigkeit aus der Einheit entstehen soll. Ja es wurde oben gezeigt, daß alle Complikation als wiederholte Gabelung angesehen werden kann. Das Zusammentreten von zwei oder mehr unabhängigen Einheiten zu gemeinsamer Wirkung ist ein Vorgang wesentlich anderer Art. Es ist zu prüfen, ob bei solch freiem Zusammenwirken das Gesetz der Complikation sich erfüllt. Ob nicht vielmehr das Auftreten der Complikation mit ihrer harmonischen Zahlenreihe auf Differenzierung aus einem Ganzen zu schließen zwingt. Diese Frage möchte ich ohne eingehende Prüfung nicht entscheiden, doch vermute ich, daß letztere Annahme zutreffend ist.

Scheinbare Ausnahmen. Einige Beispiele scheinbarer Ausnahmen mögen angeführt werden:

1. **Gruppierung.** Das Zusammentreten freier Elemente zu einem Ganzen nennen wir Gruppierung. Es gibt harmonische Gruppierungen, z. B. in der Kunst. Es wird jedoch solche Gruppierung, soweit sie Menschenwerk ist, von dem menschlichen Geist geleitet und dürfte nichts weiter sein, als ein in die Außenwelt getragenes Abbild (Objektivierung) eines geistigen Vorgangs, der durch Gabelung (im Aufnahmsorgan) aus einem Ganzen entstanden ist und deshalb dem Gesetz der Complikation folgt.

2. Die **Planeten** und **Satelliten** bilden harmonische Gruppen und ordnen sich nach dem Gesetz der Complikation um den Zentralkörper. Sie stehen scheinbar frei und einzeln nebeneinander. Aber es läßt sich zeigen, daß sie sich aus einem Ganzen durch harmonische Gliederung abgespalten haben. Gerade die harmonischen Zahlen in den Sonnendistanzen beweisen, daß die Planeten sich nicht einzeln von der Sonne losgelöst und sich ihren Ort im Weltraum gesucht haben. Nicht durch Gruppierung, sondern durch Differenzierung hat sich unser Sonnensystem gestaltet. Daher kommt es, daß dasselbe ein harmonisches Ganzes bildet.

Gabelung ist einer der elementarsten Entwicklungsprozesse in der Natur. Sie entspricht, wie oben gezeigt, einer Abschnürung ohne vollständige Trennung (Gliederung, nicht Teilung), wobei die beiden neuen Gebilde freie Bewegung erhielten, nur gebunden im Abschnürungspunkt. Die Gabelung kann sich, immer feiner werdend, beliebig wiederholen.

Ein Bild solcher Gabelung ist der Baum, von der ersten Furkation im jungen Keim tausendfach wiederholt, ja millionenfach in demselben Raum. Wie viele Gabelungen mag eine tausendjährige Eiche in ihren Ästen und Zweigen bis zum feinsten Trieb vollzogen haben. Und dabei ist der Baum ein harmonisch gegliedertes Ganze geblieben.

Mit der **Bifurkation** Hand in Hand geht die **Trifurkation**, die Dreigabelung. Sie ist, wie wir sahen, eine wiederholte Bifurkation. Bei der Gabelung treten an Stelle des ursprünglichen

Vektors (1) (Fig. 60) zwei neue Vektoren '2 2' in neuen Richtungen. Dabei bleibt in der Regel ein Rest von 1 in der alten Richtung. Dieser Rest wirkt begünstigend auf die Bildung der Dominante 3, innerhalb Gabel '2 2', indem 3 in die Richtung 1 fällt und sich zu dem Rest addiert (Fig. 61). Ein Bild für den Vorgang ist die Bildung der Knospe in der Gabel. Wird die Knospe 3 durch den Rest in 1 wesentlich verstärkt, so kann 3 stärker werden als '2 2'. Dann wächst 3 über '2 2' hinaus und kann sich wieder gabeln (Fig. 62). Das ist ein bei Pflanzen gewöhnliches Bild. Wir finden dasselbe aber auch in der unbelebten Natur, z. B. bei den Schneekrystallen. Die gleichen Gebilde bringt die Kunst hervor, und zwar aus innerem, durch die Naturgesetze geleitetem Gestaltungstrieb, nicht im Kopieren der Natur. Erst nachdem die Kunst ihre Werke der Ornamentik geschaffen hat (vielleicht schon während des Schaffens), erkennt sie ihre Konkordanz mit der nach den gleichen Gesetzen schaffenden Natur. Sie macht eine Trifurkation und nennt das Gebilde ein Kleeblatt. Die wiederholte Bi- und Trifurkation kann prinzipiell ins Unendliche gehen. Wir können den Vorgang neben die Iteration in der Mathematik stellen. Die Wiederholung führt zu immer weitergehender Verfeinerung, bis in der Natur eine Grenze erreicht ist. „Es ist dafür gesorgt, daß die Bäume nicht in den Himmel wachsen.“ Die Summe aller Gabelungen aus einem Anfangs-Vektor bildet ein harmonisch differenziertes Ganzes, den Baum.

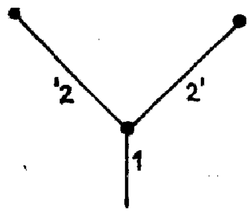


Fig. 60.

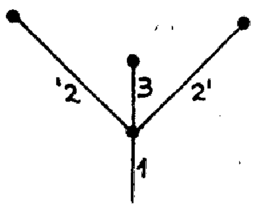


Fig. 61.

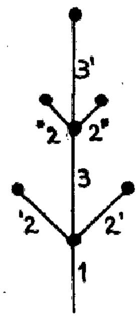


Fig. 62.

Unsere Gabel als Werkzeug, das Urbild unserer Furkation, ist ursprünglich ein Ast mit seinen Zweigen. Noch heute macht man solche Gabeln.

In der **Genealogie** macht man, in Analogie mit dem Naturvorgang, den **Stammbaum** mit seinen Zweigen als Bild der Familie.

Quinquifurkation (Fünfgabelung) (Fig. 63) ist eine weit seltenere Erscheinung als die Trifurkation. Ein Beispiel in der Natur ist die menschliche Hand, sowie die Rippen mancher Blätter.

Nonifurkation (Neungabelung) (Fig. 64) ist die natürliche Weiterentwicklung. Sie entspricht der Normalreihe $\mathbf{N}_3$. Damit dürfte, wie überall in der Natur, praktisch die Grenze erreicht sein.

Schöne Beispiele der wiederholten Gabelung bis zu der Grenze $\mathbf{N}_3$ bieten in der unbelebten Natur beispielsweise die Formen der Schneekrystalle.[1]

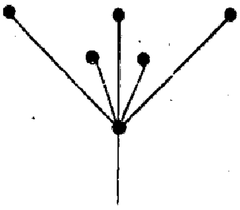


Fig. 63.

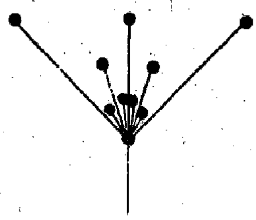


Fig. 64.

Displikation.

Displikation nennen wir die Gegenoperation der Complikation.

Geometrisch-mechanische Darstellung der Displikation. Wir nannten Complikation ein Ersetzen von zwei primären Vektoren durch eine harmonische Gruppe schwächerer Vektoren in der Ebene der primären. Die umgekehrte Operation (Displikation) ist die Ersetzung einer Gruppe von Vektoren durch zwei Hauptvektoren. Displikation geschieht durch Zerfall jedes Vektors in zwei Komponenten in Richtung der Hauptvektoren nach dem Parallelogramm der Kräfte. Dabei summieren sich die nun gleichgerichteten Komponenten.

Beispiel. Fig. 65 zeigt die Ersetzung der Vektoren C D E durch ihre Komponenten in den Vorzugsrichtungen A und B. Die zur Displikation gelangende Vektorengruppe kann eine harmonische oder eine nichtharmonische sein. In der Natur spielt sich der Vorgang oft in der Weise ab, daß eine Anzahl nicht harmonischer Vektoren sich (durch Displikation) zu wenigen Vorzugs-Vektoren sammelt und daß sich dann zwischen den Vorzugs-Vektoren (durch Complikation) harmonische Gruppen entwickeln.

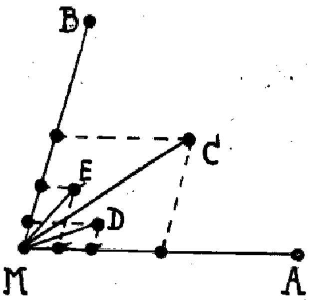


Fig. 65.

Beispiel 1. Bei den **Krystallen** nehmen wir an, die krystallbauende Partikel sei von einer Kraftsphäre umgeben, in der nach vielen Richtungen, vielleicht nach unendlich vielen, Attraktionskräfte wirken. Die Attraktionskräfte sammeln sich unter bestimmten Ein-

[1] Vgl. Goldschmidt, Atlas der Krystallformen 1916, Bd. 3, Taf 64—81.

flüssen, wie sie den Krystallpartikeln und ihrer Umgebung eigentümlich sind, zu einer kleinen Zahl (meist 6, seltener 8, noch seltener 12) Kräften in Vorzugsrichtungen, die die Kraftsphäre ersetzen. Wir nennen sie Primärkräfte. Je zwei solcher Kräfte in Vorzugsrichtungen (Primärkräfte) A B bilden eine Ebene (Zonenebene). In der Ebene zwischen A und B vollzieht sich die Complikation und bildet ein harmonisches Kräftebündel. Zu jedem Vektor dieses Bündels steht eine Krystallfläche senkrecht. Diese Flächen bilden das harmonisch gegliederte Zonenstück A B. Ist diese Auffassung zutreffend, so geht der Complikation die Displikation voraus.

Beispiel 2. Polarisation des Lichts. Wir nehmen beim gewöhnlichen Licht Schwingungen an, senkrecht zum Strahl nach allen Richtungen. Durch Polarisation werden alle diese Schwingungen ersetzt durch Schwingungen in zwei aufeinander senkrechten Richtungen. Diesen Vorgang können wir als Displikation auffassen. Wir nehmen in jeder Schwingungsrichtung einen Vektor als Maß für die Schwingungskraft, zerlegen diese Vektoren in Komponenten nach den Polarisationsrichtungen und addieren die Komponenten.

Wir können definieren:

Displikation ist die Sammlung verschieden gerichteter Vektoren in Vorzugsrichtungen.

Auch in anderen Gebieten der Krystallphysik stoßen wir auf Vorgänge, die wir als Displikation auffassen und durch die Displikations-Funktion darstellen können.

Furkation und Displikation. Ein einzelner Vektor kann durch Displikation in zwei Vektoren von gegebener Richtung zerlegt werden. Das ist der Fall bei der Bifurkation. Bleibt ein Rest in der alten Richtung ungespalten, so haben wir die Trifurkation.

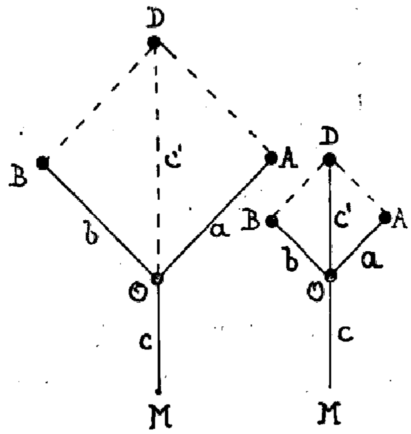


Fig. 66. Fig. 67.

Beispiel. Ein Vektor $MO = OD = c$ (Fig. 66) soll durch **Bifurkation** in zwei Vektoren in Richtung OA und OB gespalten werden. Das geschieht mit Hilfe der Parallelen DA und DB. Dann ist $OD = c' = c$ die räumliche Summe von $OA = a$ und $OB = b$ oder (geometrisch-mechanisch) $c = a + b$.

Bei der **Trifurkation** (Fig. 67) haben wir: $c = a + b + c'$.

Algebraische Darstellung der Bifurkation. Wir hatten die Complikationsreihe in der Form:

$$c = \frac{1}{m}\Big[1 + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1} i) + i\Big] = 1 + i,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$. Hier stehen die beiden Endvektoren senkrecht aufeinander.

Dann ist Displikation = Spaltung der Reihe in einen reellen und einen imaginären Teil, d. h. in zwei aufeinander senkrechte Vektoren. Den Fall haben wir beispielsweise beim polarisierten Licht. Wir haben:

$$C_n = \frac{1}{m}(1 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots a_{n-1} + 0)$$
$$+ \frac{1}{m}(0 + b_1 + b_2 + \cdots\cdots b_{n-1} + 1)\, i.$$

Eine allgemeinere Form der Complikationsreihe ist:

$$C_n = \frac{1}{m}\Big[1 + (a_1 + b_1 k) + (a_2 + b_2 k) + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1} k) + k\Big],$$

wobei $k = \alpha + \beta i$ eine beliebige komplexe Größe ist. Nun bilden die Endvektoren beliebigen Winkel und haben ungleiche Einheit. Displikation ist dann die Spaltung:

$$C_n = \frac{1}{m}(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 0)$$
$$+ \frac{1}{m}(0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 1)\, k$$

oder allgemein:

$$C_n = \frac{1}{m}\Big[A + (a_1 A + b_1 B) + (a_2 A + b_2 B) + \cdots + (a_{n-1} A + b_{n-1} B) + B\Big],$$

wobei $A = a + \alpha i$; $B = b + \beta i$ beliebig große und beliebig gerichtete Vektoren sind. Im speziellen Fall kann $A = 1$, $B = i$ sein.

Displikation ist dann die Spaltung in die beiden Vektoren:

$$C_n = \frac{1}{m}(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 0)\, A$$
$$+ \frac{1}{m}(0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 1)\, B,$$

wobei überall: $(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 0)$
$= (0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 1) = m$ ist.

Die Summe (Σ) aller Glieder ist überall:

$$\Sigma = A + B.$$

Displikation im Raum. Ein Vektor im Raum kann in Komponenten nach drei gegebenen Richtungen des Raumes zerlegt werden. Alle Vektoren im Raum können in drei Hauptrichtungen aufgesammelt werden. Wir nennen das Displikation im Raum. Algebraisch können wir dafür schreiben:

$$
\begin{aligned}
C_n = &\frac{1}{k}(0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 1)\,A \\
&+ \frac{1}{l}(0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 1)\,B \\
&+ \frac{1}{m}(0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + 1)\,C = A + B + C,
\end{aligned}
$$

wobei A B C gegebene vektorielle Einheiten im Raum sind.

Umformung sei die Umwandlung einer (eventuell harmonischen) Vektorengruppe in eine andere, gleichwertige. Das geschieht durch Displikation und darauffolgende Complikation, im Raum oder in der Ebene.

Wir sammeln durch Displikation die Komponenten der Vektorengruppe in zwei oder auch mehr gegebene Richtungen und erhalten so neue Anfangs-Vektoren. Zwischen diesen neuen Anfangs-Vektoren vollzieht sich die neue Complikation.

Bei den **Krystallen** ist solche Umformung eine häufige und wichtige Erscheinung. Wir nennen sie da: **Wechsel des Habitus.**

Beispiel 1. Eine Krystallart, z. B. **Alaun,** krystallisiert vorzugsweise in Oktaedern und bildet ein Formensystem, bei dem die Anfangsvektoren (Primärkräfte) senkrecht zu den 8 Oktaederflächen gerichtet sind. Zwischen den Anfangsvektoren entwickeln sich nach dem Complikationsgesetz die harmonischen Bündel und senkrecht zu diesen die Krystallflächen des Alauns. Sie bilden das Formensystem des Alauns. Das Oktaeder und seine Deszendenten bestimmen den Habitus.

Nun kommt es vor, daß unter anderen äußeren Bedingungen (andere Lösungsgenossen, andere Temperatur) in der Mutterlauge, der Alaun in Würfeln krystallisiert. Dann sind die Vektoren senkrecht zu den 6 Würfelflächen die Anfangs-Vektoren. Wir nennen nun diese die Hauptprimärkräfte. Zwischen den Würfelnormalen entwickeln sich durch Complikation die harmonischen Bündel und bilden das Formensystem des Alauns unter den neuen Bedingungen. Der Würfel und seine Deszendenten bestimmen nun den Habitus. Das Ersetzen der Oktaeder-Vektoren durch die Würfel-Vektoren, als Hauptprimärkräfte, aus denen das Formensystem sich ableitet, nennen wir Änderung des Habitus.

Beide Arten von Vektoren sind voneinander abhängig. Ich kann die Oktaeder-Vektoren in Würfel-Vektoren umwandeln; graphisch oder durch Rechnung. Das geschieht durch Displikation. Jeder Oktaeder-Vektor zerfällt in drei Komponenten in Richtung der drei benachbarten Würfel-Vektoren. Nachdem dies geschehen, setzt zwischen den neuen Würfel-Vektoren die Complikation ein und erzeugt das neue Formensystem mit dem neuen Habitus.

Umgekehrt kann man das Würfel-Formensystem in ein Oktaeder-Formensystem durch Displikation und darauffolgende Complikation umsetzen. Wir sehen, beide Operationen gehen Hand in Hand. Complikation und Displikation lassen sich ebensowenig trennen, wie Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division, Potenzieren und Radizieren u. a.

Beispiel 2. Ein **Nikol-Prisma** polarisiert das Licht. Es sammelt die Schwingungs-Vektoren in zwei aufeinander senkrechte Richtungen durch Displikation. Eine Drehung des Prismas bewirkt Umformung durch Sammlung auf neue Hauptrichtungen. Das geschieht durch Displikation.

Complikation und Displikation in der Kunst. In vielen, ja wahrscheinlich in allen Gebieten der Kunst, wird das Gesetz der Complikation angetroffen. Streng ließ es sich bisher in der Musik und in der Farbenkunst nachweisen. Nun haben wir allgemein gezeigt, daß Complikation und Displikation nicht zu trennen sind, daß die eine der beiden Funktionen die andere voraussetzt und mit sich bringt. Wir wollen nun für eine der Künste, für die Musik, zeigen, daß sich in der Tat Displikation nachweisen läßt, ja daß sie der Complikation vorausgeht.

Die Entwicklungsgeschichte der Musik gibt folgendes Bild: Aus einfachen, primitiven Anfängen hat sich die Musik durch Complikation immer reicher entfaltet. Der Reichtum (besonders in der Harmonie) hat zugenommen, bis er in der heutigen Musik zu einer verwirrenden Fülle geführt hat und zu einer Überfeinerung und einem Reichtum, die dem Chaos zustreben.

Der primitiven Musik ist jedoch ein chaotischer Zustand vorhergegangen. Es hat sich die primitive Musik aus dem Gewirr der Klänge durch Bildung reiner Töne abgeklärt. Diese Abklärung ist Displikation, d. h. Verdichtung (Sammlung) des Gewirrs der Klänge auf wenige Einzelklänge. So wird die Sprache zum Gesang. Das primitive Musikinstrument gibt einen Vorzugston an Stelle der Geräusche. Wir können sagen:

Musik ist eine Abklärung zu harmonischen Gruppen und Folgen aus dem Chaos des Erklingenden.

Nachdem dann durch fortschreitende Complikation (wie sich streng verfolgen läßt) die Mannigfaltigkeit bis zum Chaotischen gesteigert wurde, haben wir uns dem Anfangszustand genähert. Der Gesang wird wieder zur Sprache, der Bel Canto der Italiener wird zum WAGNERschen Sprechgesang. Damit ist die Periode der Entwicklung geschlossen.

Die Musik entwickelt sich aus dem Chaos durch Abklärung zu reinen Tönen (Displikation), sie differenziert sich (durch Complikation) bis zur klassischen Höhe und darüber hinaus durch Überreicherung bis zum Chaos. Dann muß und wird, um aus dem Chaos herauszukommen, die Abklärung (durch Displikation) neu einsetzen. Dieser Vorgang, den wir heute erleben, zeigt den periodischen Verlauf der Entwicklung in stetigem Wechsel von Displikation und Complikation.

Transponieren in der Musik ist ein Wechseln des Grundtons und damit zugleich aller seiner Ableitungen, wie sie das Stück enthält. Das Transponieren in der Musik entspricht in der Krystallographie einem Wechsel des Habitus, von dem oben die Rede war. Wir können uns den mechanischen Vorgang so vorstellen, daß alle Töne auf den neuen Grundton projiziert werden und daß sich aus dem neuen Grundton das Stück ebenso entwickelt, wie aus dem ursprünglichen.

Modulation ist ein ähnlicher Vorgang im Kleinen. Hier wechselt der Akkord durch Wechseln des Grundtons, Wechsel des Grundtons ist aber Displikation, das ist Sammeln auf gegebene neue Vorzugs-Vektoren.

Diese Andeutungen mögen hier genügen. Sie werden verständlicher nach den noch nicht veröffentlichten Untersuchungen des Verfassers über Musiklehre. Wir wollen auf die Displikation hier nicht näher eingehen. Ihre Eigenschaften ergeben sich aus denen der Complikation. Bestätigt sich die Complikations-Funktion als eigenartig und wichtig, so gilt dies auch für die Displikation.

Funktion mit konstantem Summenwert. Die Complikations-Funktion unterscheidet sich von anderen mathematischen Funktionen dadurch, daß ihr Wesen nicht durch den Summenwert der Glieder ausgedrückt ist, sondern durch die Zahl und Eigenart der Glieder. Selbst wenn die Zahl der Glieder unendlich ist, interessiert uns die Eigenart und Anordnung der zuerst gebildeten Glieder. Dabei nimmt das Interesse für die weiteren Glieder rasch ab. Diese nähern sich der Null und können vernachlässigt werden.

Bei einer anderen Funktion F (x), z. B. x^2, interessiert uns der Wert der Funktion als Ganzes, z. B. $3^2 = 9$, ebenso bei $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$. Wenn wir sin x in eine unendliche Reihe auflösen, so interessieren uns nicht die einzelnen Glieder der Reihe, sondern nur ihre Summe.

Anders bei der Complikations-Funktion. Diese bildet Reihen, deren Summe konstant $= A + B$ ist, wenn die Grundwerte A und B konstant sind. Uns interessieren die Einzelglieder der Complikationsreihe nach Zahl und Art. Diese sind abhängig von der Stufe der Complikation, das ist von der Feinheit der Differenzierung, von dem Index (n) der Complikationsstufe C_n.

Es fragt sich: Ist ein mathematisches Gebilde als Funktion anzusehen, wenn der Gesamtwert des Gebildes konstant ist. Diese Frage ist zu bejahen. Funktion ist ein mathematisches Gebilde, dessen Eigenschaften gesetzmäßig von gewissen gegebenen Werten, Parametern (x, y . . .) abhängig sind. Das Gesetz der Abhängigkeit charakterisiert die Funktion. Eine der Eigenschaften einer Funktion ist ihre Summe, der Gesamtwert der Funktion. Sie hat aber noch andere Eigenschaften und diese können bei konstanter Summe variieren und von den Parametern x, y . . . gesetzmäßig abhängig sein.

Anmerkung. Die Grundwerte A B müssen nicht Konstante sein. Sie können selbst variieren; in der Natur einem Entwicklungsgesetz unterworfen sein.

Beispiel. Ich spiele in der Musik ein Stück piano. Dann haben die Grundtöne eine bestimmte Kraft. Ich spiele dasselbe Stück forte. Dann verstärkt sich die Kraft der Grundtöne und damit zugleich die aller abgeleiteten. Die Verstärkung kann gesetzmäßig sein.

Aber für den Moment der Complikation, für die Entwicklung der harmonischen Reihen, sind die Grundwerte A B fest (konstant).

Complikations-Funktion = Entwicklungs-Funktion. Eine weitere Eigentümlichkeit der Funktion ist, daß sie eine Entwicklungs-Funktion ist, daß Entwicklungsvorgänge der Natur in ihr ihren Ausdruck finden. Andere mathematische Funktionen, die diese Eigenschaften besitzen, sind mir nicht bekannt. Vielleicht ist die Complikations-Funktion (genügend weit gefaßt) die einzige denkbare Entwicklungs-Funktion. Dann fielen die Begriffe Entwicklung und Complikation zusammen. Es ist zu prüfen, ob sich das so verhält. Sollten sich noch andere Entwicklungs-Funktionen ein-stellen, so wäre die Complikations-Funktion immer dadurch ausgezeichnet, daß sie die zuerst bekannte, vielleicht die wichtigste Entwicklungs-Funktion ist.

Zusammenfassung.

Algebraisch erscheint die Complikation in Form einer Reihe als eine Funktion von bestimmten Eigenschaften. Wir nennen sie Complikations-Funktion (**C**). Ihr Bildungsgesetz ist festgelegt. Von ihren Eigenschaften ist erst wenig bekannt. Sie bedarf der strengen Fassung und des mathematischen Ausbaues.

Geometrisch ist Complikation die Bildung von abgeleiteten, mit Länge begabten Richtungen (Vektoren) zwischen zwei gegebenen gerichteten Anfangslängen. Richtung und Länge der abgeleiteten Werte ist bestimmt durch das Entwicklungsgesetz der Complikation.

Mechanisch ist die Complikation die Einschiebung von Zwischenkräften von bestimmter Zahl, Richtung und Stärke zwischen zwei gegebenen Anfangskräften nach dem gleichen Gesetz.

Displikation ist die inverse Operation resp. die inverse Funktion der Complikation.

Schlußbemerkung.

Complikation in der Krystallographie. Das Complikationsgesetz wurde zuerst bei der Entwicklung der Krystallformen aufgefunden. Das ist kein Zufall. Das Gesetz zeigt sich dort in seiner strengsten Form und seiner reichsten Entfaltung. Dort sind ihm die größten Aufgaben gestellt. Wer sich mit dem Wesen der festen Körper beschäftigt, das die wichtigste Unterlage unserer Physik bildet, der wird sich entschließen müssen, der Krystallographie näher zu treten. Denn die Krystallographie ist die Lehre von den festen Körpern.

Wir haben da vor uns die große Frage: Wie entstehen und wie vergehen die festen Körper? Welches sind die Kräfte, mit denen die Partikel im Krystall sich anziehen und abstoßen? Wie finden wir diese Kräfte und wie erkennen wir ihre Wirkungsweise? Wie wirkt jede solche Kraft für sich und wie wirken mehrere zusammen? Wie teilen und vereinigen sich diese Partikelkräfte? Mit dieser Fragestellung sind wir mitten in der Krystallographie und mitten im Wirkungsgebiet des Complikationsgesetzes. Dort wird der Ausbau der Complikations-Funktion die reichsten und wertvollsten Früchte tragen; im Gebiet der Formenlehre, ebenso wie in der Partikelphysik, in der Kohäsionslehre und in der Krystalloptik.

Bedeutung der Complikations-Funktion. Es wurde zu zeigen versucht, daß in der Complikation eine eigene mathematische Funktion vorliegt, die eines Ausbaues wert und fähig ist. Welches ihr Gewicht und ihre Bedeutung sein wird, läßt sich noch nicht sagen. So viel läßt sich aber schon jetzt übersehen, daß sie berufen ist, in großen Gebieten der Naturwissenschaft klärend und fördernd einzugreifen. Sie beherrscht die Entwicklung der Flächenreihen der Krystalle und deren Äquivalent, die Differenzierung der krystallbauenden und flächenerzeugenden Partikelkräfte. Sie gibt den Fraunhofer-Linien im Spektrum und den Planeten im Weltraum ihren Ort. Sie beherrscht den Aufbau der Werke der Musik vom kleinsten Liedchen hinauf bis zu Palestrinas Stabat Mater und Bachs großer H-Moll-Messe. Sie ordnet die Farben in der Kunst von der primitivsten der Australneger hinauf bis zu Raffael und Holbein. Sie beherrscht die Entwicklung unserer Maß-, Gewicht- und Zahlensysteme und greift in die unbelebte, wie in die belebte Natur ein, überall, wo sich Mannigfaltigkeit aus dem Einfachen entwickelt. Das ist nicht wenig. Es ist danach der mathematische Ausbau wohl der Mühe wert. Denn je besser die Funktion ausgebaut ist, desto wirksamer wird sie in allen Gebieten eingreifen, in denen das Gesetz der Complikation sich zeigt. Die Anfänge solchen Ausbaues, wie sie oben versucht wurden, lassen erkennen, daß eine einfache und elegante Fassung möglich ist.

Die Complikations-Funktion hat vor allen anderen mathematischen Funktionen (soweit ich sehen kann) den Vorzug, daß sie nicht nur in die *Mechanik* eingreift, sondern auch in die *Ästhetik*, das ist die Lehre vom *Schönen* (zunächst bei den Farben und Tönen), und wahrscheinlich sogar in die *Ethik*, das ist die Lehre vom *Guten*. Ist das so, so werden auch die *Philosophen*, wie die *Künstler* nicht umhin können, sich ihrer zu bedienen und sich bei ihr Rat zu holen.

Die Complikations-Funktion hat einen Weg erschlossen, der, von der Mathematik und Physik ausgehend, zur Physiologie der Sinnesorgane führt und von dieser weiter zu der Psychik und zur

Erkenntnistheorie. Nachdem sie diesen Weg gangbar gemacht hat, bleibt die Aufgabe, zu prüfen, ob nicht auch andere Funktionen solche Wege zu führen imstande sind. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß nach solcher Prüfung doch der Complikations-Funktion der Vorzug als Vermittler zwischen Physik und Psychik gewahrt bleibt.

Wenn heute schon, bei ihren ersten Schritten diese merkwürdige Funktion klärend und fördernd in so verschiedene Gebiete eingreift, wie wird sie das erst tun, nachdem sie in den Händen der Mathematiker und Physiker den Ausbau erfahren haben wird, dessen sie fähig ist.

Heidelberg, 1. Oktober 1921.