Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Curtze, Maximilian** (1837–1903)

Titel: **Die Abhandlung des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jacobstab**

Quelle: Bibliotheca mathematica.
Neue Folge, Band 12 (1898),
Seite 97 – 112.

Inhaltsangabe und Kommentar zu dem Werk „De sinibus, chordis et arcubus“, welches Levi ben Gershon 1342 Papst Clemens VI. widmete.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

JOURNAL

D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1898.

NEUE FOLGE 12.

NOUVELLE SÉRIE 12.

STOCKHOLM
G. ENESTRÖM.
BRAHEGATAN 43.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ-LOUIS-FERDINANDSTR. 2.

PARIS
A. HERMANN.
RUE DE LA SORBONNE 8

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM, 1898.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK — JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON — PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1898. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 12. — Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr. — NOUVELLE SÉRIE. 12.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Prinz Louis-Ferdinandstr. 2.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Die Abhandlung des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jacobstab.

Von M. CURTZE in Thorn.

»*Leo de Balneolis Israhelita De Sinibus, chordis et arcubus, Item Instrumento Revelatore Secretorum*», so heisst der Titel unserer Abhandlung im Codex Vindobonensis Palatinus 5277 (Philos. 68), in welchem dieselbe den 5. Platz einnimmt. Jedenfalls ist dieser Titel nicht ein Machwerk des LAMBECIUS, wie STEINSCHNEIDER in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 111 (Anm. 12), zu verstehen giebt. sondern von dem Schreiber des ganzen Stückes herrührend. Er ist auch, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, vollständig gerechtfertigt. Ich theile zunächst das dem Ganzen vorausgeschickte Inhaltsverzeichnis, sowie die Dedicationsepistel und das einleitende Capitel mit, um, nachdem ich einige Bemerkungen daran geknüpft habe, in eine Analyse des weitern Werkes einzutreten.

Distinctio libri.

Primum caput. Primum capitulum continet epistolam ad dominum papam prædictum et prologum operis, in quibus expresse tanguntur quattuor causæ cum suis gradibus operis prælibati.

Secundum caput dividitur in quinque dictiones. In secundo capitulo stabiliuntur quædam principia, quæ sunt opportuna ad omnia hic intenta, et istud capitulum in quinque dictiones dividitur.

Prima dictio. In prima ponitur descriptio seu interpretatio quorundam vocabulorum, quibus utimur in hac arte.

Secunda dictio. In secunda ponitur quædam demonstratio geometrica ad scientiam chordarum et arcuum directiva.

Tertia dictio. In tertia docetur mediantibus dictis demonstrationibus super tabulas arcuum et chordarum.

Quarta dictio. In quarta ponuntur tabulæ et usus earum.

Quinta dictio. In quinta docetur per latera quædam scita et angulos quosdam scitos triangulorum scire in lateribus et angulis eorum residua.

Tertium capitulum. In tertio capitulo ponitur unum primum utile ad cognoscendum semidiametrum solis et lunæ per comparationem ad circulum, quem describit extra suam deferentem experientiæ tempore et quantitate radiorum ipsorum, quæ per fenestras domorum introeunt.

Quartum capitulum. In quarto inquiritur centrum visus et, quando per instrumentum simul duæ stellæ videntur, perfecte cognoscitur earum distantia.

Quintum caput. In quinto docetur prædicti instrumenti factura et usus ad notitiam dictæ distantiæ.

Sextum caput. In sexto cognoscitur certissime altitudo solis seu stellæ alterius cuiuscumque ad sciendum horas diei et noctis, et latitudinem stellæ cuiuslibet, supposita altitudinis meridianæ eiusdem notitia.

Septimum capitulum. In septimo docetur per istud instrumentum cognosci diameter circuli stellæ cuiusvis per comparationem ad circulum, quem extra suum deferentem describit.

Octavum capitulum. In octavo docetur per istud instrumentum distantia longitudinis solis et lunæ, et unde sciantur aliqualiter loca stellarum fixarum.

Nonum caput. In nono dantur aliqua documenta ad usum instrumenti prædicti, ne in ipso et eius usu aliquis error intercidat.

Iste tractatus fuit translatus de Hebræo in latinum Anno Christi 1342, pontificatus domini CLEMENTIS papæ sexti Anno primo.

Epistola auctoris.

Sanctissimo patri et domino, domino dilecto CLEMENTI, perspicacitatis acumine, celeri intellectu, thesauro memoriæ et facundia eloquendi ab altissimo domino clementi multiplicibus meritis ac prædictis ad thronum summi pontificatus electo ex milibus, LEO ISRAHELITA DE BALNEOLIS philosophantium verum christianitatis et totius fœlicitatis obtentum. Quoniam Sanctitas

Vestra in statu Suæ iuventutis cogitare incepit circa arcana et secreta cuiuscumque scientiæ, ideo DEUS, qui nostris desyderiis revelat mysteria, vult dictæ Sanctitatis maiestati omnis scientiæ quamcumque particulam clarere perfecte, propter quod mihi secretum astronomiæ scientiæ completum in *Baculo Jacob* exstitit revelatum, non in sapientia, quæ in me sit plus quam in cunctis viventibus, sed ut regi regum, patri et domino omnis eius fiat interpretatio manifesta. Nec mirum, quia, quamquam ex dictis possit evidenter concludi, Vestram Sanctitatem omni fulgure scientia, nihilominus DEUS aliquando aliquam scientiarum particulam parvulis quodammodo specialiter revelat ad solamen gaudiumque sapientum dominorum. Et licet prædictum secretum iamdiu fuit revelatum, ut apparebit inferius, et annotatum hebræis litteris, et quod aliis verbis sine debito ordine ex ore meo forte fuerit auretenus, scilicet partialiter, repræsentatum, nusquam tamen ordinate translatum fuerat in latinum, sed sic permansit occultum 21 diebus, donec venit, quasi similitudo hominis filii, religiosus vir frater Petrus de Alexandria ordinis fratrum heremitarum Sancti Augustini, qui ad propalandum secretum baculi prælibati tangit labia mea, et aperiens in eum locutus sum, et dixi ad eum, qui stabat coram me: Scribe! Et me sibi referente omnia verba mysterii huius conscripsit, quæ exordiuntur, ut sequitur.

Prologus operis.

Cum sapientis astronomi verba ad notitiam nostram pervenerunt, instrumenta fuerunt aliqua ad inducendum nos in Christianitatem et multorum accidentium, quæ cœlestibus corporibus inesse videntur, ut aliquod instrumentorum dictorum nos ducat in veritatem digitorum eclipsatorum solis vel lunæ, nec per aliquod eorum possumus cognoscere, si aliquis planeta concentrica non inducit nos ad eccentricitatis notitiam quantitatis. Et in speciali, quia antiqui philosophi non potuerunt venire ad portam, quæ nos duceret in veritatem eccentricitatis prædictæ, inter se controversiam non modicam habuerunt, quibusdam eorum eccentricitatem dicentibus, ut Ptolomæo et sequentibus eum, quibusdam non credentibus hoc naturaliter demonstrare, dicentibus eam non esse possibilem. Ego vero considerans dictam controversiam tam magnam inter philosophos antiquos nec non modernos, et inveniens diversitatem non modicam ab eo, quod erat conveniens ad sententiam Ptolomæi in digitis eclipsatis in luna tempore eclipsi lunaris, quæ fuit anno incarnationis Christi 1321, et in sole tempore eclipsis solaris præcedentis inmediate differentiam lunarem, quarum quantitas fuit longe maior, quam esse debuisset secundum PTOLOMÆI doctrinam, commotus fui ad inquirendum instrumentum veridicum, quod nos duceret in veritatem omnium prædictorum, et DEUS sua gratia oculos meos apperuit ad inveniendum unum instrumentum levis facturæ, quod ducit facile et sine errore ad veram notitiam prædictorum et aliorum multorum magis desyderatorum scibilium circa cœlestia corpora. Et cum inveni per experientias multas cum instrumento prædicto eccentricitates orbium planetarum multum diversas ab eo, quod erat conveniens ad PTOLOMÆI scientiam, coactus necessario fui experientias multas accipere circa vera loca cuiuslibet planetarum, ut certitudo veritatis prædictorum locorum esset in via ad inveniendum dispositiones cœlorum et orbium omnium planetarum quæ correspondent omnibus, quæ apparent in eis ex eccentricitate, velocitate, retardatione, directione, retrogradatione et statione eorum, ad quorum omnium veritatem cum instrumento prædicto perveni DEO duce, et ideo merito instrumentum iam dictum *Revelatorem Secretorum* vocavi. Igitur DEO, qui veritatem istorum ipse sui gratia revelavit, ut possumus, gratiarum actionem debitam persolventes cum NEHEMIA propheta benedicamus nomini gloriosæ suæ excelso in omni benedictione et laude. Amen!

Aus dem soeben Mitgetheilten scheint mir hervorzugehen, dass manche Bemerkungen STEINSCHNEIDERS nicht richtig sind. Zunächst ist das Manuscript lat. Monac. 8089 mit dem Wiener bis auf unwesentliche Varianten vollständig übereinstimmend, und nennt ebenso wie letzteres die Vorrichtung an ersterer Stelle *Baculus Jakob,* an zweiter dann *Revelator Secretorum,* und wenn das Pariser Manuscrit latin 7293, wie STEINSCHNEIDER sagt, ohne Angabe des Übersetzers ist, so beruht das darauf, dass ihm das erste Blatt fehlt, und es erst mit den Worten des Prologus: »retardatione, directione», u. s. w. beginnt, wie mir durch gütige Mittheilung des Herrn P. TANNERY bekannt wurde. Es ist meiner Meinung nach zweifellos, dass auch dieses CLEMENS VI selbst gehörige Manuscript auf dem fehlenden Blatte das enthielt, was ich oben habe abdrucken lassen. Aus der Anwendung der beiden Namen *Baculus Jacob* und *Revelator Secretorum* und der Art und Weise, wie der erste gebraucht wird, dürfte aber zu schliessen erlaubt sein, dass unter *Baculus Jacob* ein schon bekanntes Instrument zu verstehen ist, welches LEO verbesserte, in neuer Weise benutzte, und ihm deshalb sowohl, als weil er seinen Fund als auf göttlicher Einwirkung entstanden ansah, den Namen *Revelator Secretorum* beilegte. Aus der Dedikationsepistel sowohl, wie aus dem Prologus, glaube ich, geht aber auch weiter hervor, dass derjenige, welcher so schreiben konnte, nothwendigerweise Christ gewesen sein muss. Jemand der im Namen der ganzen Christenheit dem Pabste seinen Gruss entbeut, der in einem Gleichnisse den Menschensohn und dessen 21-tägiges Verborgensein herbeizieht, welcher von dem Jahre der Fleichwerdung Christi spricht, kann, als er so schrieb, nicht mehr Jude gewesen sein. Man wird mir entgegenhalten, dass PETRUS DE ALEXANDRIA diese Sachen hineingebracht habe: der Stil des Ganzen, sowohl des Dedicationsbriefes als des Prologus ist doch unter keinen Umständen der einer Originalabhandlung in lateinischer Sprache, sondern eine sehr gepresste Übersetzung des *mündlich* mitgetheilten hebräischen Urtextes, und die Dedication an den Pabst könnte gerade des Übertritts zum Christenthum halber geschehen sein. Auch in diesem Buche hat, wie man sieht, LEO gegen die Ptolemäische Theorie angekämpft, wie in dem mehrfach citierten Buche *Liber bellorum Dei.* Gerade deshalb vervollkommnete er ja den *Baculus Jacob,* um die Irrthümer des PTOLEMÄUS klar legen zu können, und es ist deshalb sicherlich nicht unrichtig, auch ihn unter die Vorgänger des COPPERNICUS einzureihen. Nebenbei bemerke ich noch, dass, wenn NEUBAUER, wie Herr STEINSCHNEIDER mittheilt, eine Arbeit LEO's über das 5. Postulat EUKLID's als Fragment eines Buches »Composition über die Wissenschaft der Algebra» bezeichnet, derselbe entweder von dem 5. Postulate oder von der Algebra keine Ahnung haben kann. Heterogenere Sachen lassen sich fast nicht in einen Topf zusammenwerfen. Viel eher ist anzunehmen, dass n° 2 STEINSCHNEIDERS ein Fragment von n° 1 bildet, speciell zu der Einleitung des Buches I EUKLID's. Es wäre wohl zu wünschen, dass dieser Commentar LEO's mit dem Commentare des AN-NAIRÎZÎ, wie er jetzt von BESTHORN und HEIBERG veröffentlicht wird, und den ich in der lateinischen Übersetzung des GHERARDO CREMONESE wieder aufgefunden habe, verglichen würde, um seine etwaige Abhängigkeit von diesem letztern, und damit von SIMPLIKIOS, GEMINOS und HERON festzustellen.

Ich gehe zu einer Analyse des Werkes LEO's über. Im **zweiten Capitel** giebt die *dictio prima* nur Erklärungen, und zwar von Grad, Minuten, Secunden, u. s. w., Zeichen des Thierkreises, Eintheilung des Kreisdurchmessers in 120 *gradus,* welche aber keineswegs mit den Winkelgraden identisch seien. Er erklärt ferner Bogen, Sehne, Sinus und Sagitta; den Ausdruck Sinus-versus kennt er nicht dafür. Die *dictio secunda* beginnt mit der Bemerkung, dass die Sehne eines Bogens zugleich die Sehne des Bogens ist, welche ihn zur vollen Peripherie ergänzt, sie beweist dann folgende Sätze:

1. *Das Quadrat jeder Sehne eines Bogens, welcher kleiner ist als der Halbkreis, ist gleich dem Producte der Sagitta und des Durchmessers.* Wenn also die Sagitta bekannt sei, so sei auch die Sehne bekannt und umgekehrt; aus beiden aber kenne man auch den Sinus des Bogens und zwar in doppelter Weise. Das Quadrat desselben sei nämlich entweder gleich der Differenz der Quadrate der Sehne und der Sagitta, oder gleich dem Produkte der Sagitta in deren Ergänzung zum Durchmesser. Es folge weiter dass auch die Sehne des doppelten Bogens bekannt sei, als doppelter Sinus des einfachen Bogens, ebenso die Sehne des Bogens von $180^\circ - \alpha$.

2. *Sagitta plus cosinus ist gleich dem Radius,* d. h. in unserer Bezeichnung $\text{sinvers}\, \alpha + \cos \alpha = 1$. Ist also eine beider Grössen bekannt, so ist es auch die andere. Cosinus wird dabei als *sinus residui arcus 90 graduum* bezeichnet.

3. $\text{Sinvers}\, (90^\circ + \alpha) = 1 + \sin \alpha$.

4. $\text{Chord}^2\, (\alpha + \beta) = (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\text{sinvers}\, \alpha - \text{sinvers}\, \beta)^2$;
$\text{chord}^2\, (\alpha - \beta) = (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\text{sinvers}\, \alpha - \text{sinvers}\, \beta)^2$.

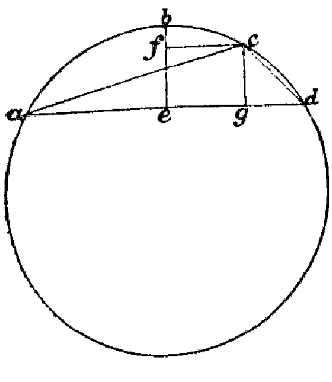

Fig. 1.

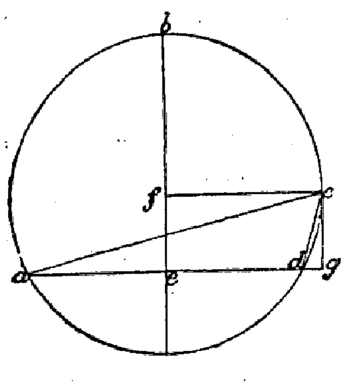

Fig. 2.

Den letzteren Beweis führt er so. Es sei (Fig. 1 und 2) $ab = \alpha$, $bc = \beta$, $bd = ab$, dann ist $ac = \text{chord}\, (\alpha + \beta)$, $cd = \text{chord}\, (\alpha - \beta)$; $be = \text{sinvers}\, \alpha$; $bf = \text{sinvers}\, \beta$, also $fe = cg = \text{sinvers}\, \alpha - \text{sinvers}\, \beta$, $ae = ed = \sin \alpha$, $fc = eg = \sin \beta$, also $ag = \sin \alpha + \sin \beta$, $dg = \pm \sin \alpha \mp \sin \beta$. Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken acg und cgd folgt dann unmittelbar der fragliche Satz. Leo hat sich damit die Möglichkeit geschaffen, weil $\text{chord}\, (\alpha \pm \beta) = 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha \pm \beta)$ ist, den Sinus der halben Summe oder Differenz zweier Winkel zu finden, sobald er ihre Sinus und daher auch die Sinus versus kennt.

5. $\text{Sinvers}\, \alpha = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Hier ist $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ nicht als *sinus residui arcus 90 graduum,* wie oben, bezeichnet, sondern als *distantia sinus a centro circuli.*

6. *Kennt man die Sehne des doppelten Bogens, so kennt man auch ihre Hälfte,*

d. h. den Sinus des einfachen Bogens, folglich, wie eben bewiesen, auch die Sagitta desselben, und daher auch nach 1 die Sehne des einfachen Bogens.

Die so gewonnenen Ergebnisse benutzt Leo nun in der *dictio tertia* um seine Sinustabelle zu konstruieren. Er berechnet sie von $15'$ zu $15'$. Man kennt nämlich $\sin 90°$, also auch durch fortgesetztes Halbieren $\sin 45°$, $\sin 22\frac{1}{2}°$, $\sin 11\frac{1}{4}°$, u. s. w.; ferner $\sin 30°$ aus dem gleichseitigen Dreieck und $\sin 18°$, also auch $\sin 2° 15'$; aus $\sin 30°$ und $\sin 18°$ kennt man aber auch $\sin 24°$ als Sinus der halben Summe, also auch $\sin 6°$ und daher $\sin 8° 15'$. Aus $\sin 30°$ ebenso $\sin 3° 45'$. Durch fortgesetzte Halbierung gelangt man so zu $\sin(15' + \frac{1}{128}°)$ und zu $\sin(15' - \frac{1}{64}°)$. Beide Sinus sind aber bis zu den Quinten genau den zugehörigen Bogen proportional, und nun findet man durch Proportionsrechnung $\sin 15' = 0° 15' 42'' 28''' 12'''' 27^{\text{v}}$; damit ist aber die weitere Berechnung gegeben.

In *dictio quarta* wird die *Tabula sinus* mitgetheilt und ihr Gebrauch zur Auffindung des Sinus und des Sinusversus aus dem Bogen und umgekehrt des Bogens aus jenen Functionen gelehrt. Ich füge Anfang und Ende der Sinustabelle hier ein.

Arcus		Arcus		Sinus			Arcus		Arcus		Sinus		
G	*M*	*G*	*M*	*G*	*M*	2^a	*G*	*M*	*G*	*M*	*G*	*M*	2^a
0	15	179	45	0	15	42	45	15	134	45	42	36	40
0	30	179	30	0	31	25	45	30	134	30	42	47	42
0	45	179	15	0	45	7	45	45	134	15	42	58	41
1	0	179	0	1	2	50	46	0	134	0	43	9	37
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
44	30	135	30	42	3	16	89	30	90	30	59	59	57
44	45	135	15	42	14	27	89	45	90	15	59	59	59
45	0	135	0	42	25	35	90	0	90	0	60	0	0

Die *dictio quinta* dieses Capitels endlich lehrt die Berechnung der Dreiecke aus Seiten und Winkeln. Diesen Abschnitt werde ich vollständig mittheilen, da er eine ganz selbständige Leistung darstellt. Er ist durchaus von einer ebenfalls vollständigen ebenen Trigonometrie verschieden, welche unter dem Titel *De tribus notis* sich in derselben Handschrift 5277^{12}, aber auch im Codex Basileensis F. II. 33 findet und eingestandenermassen auf Geber fusst.

Dictio quinta.

De scientia angulorum et laterum trianguli rectanguli.

Cognitis duabus lineis trianguli unum angulum rectum habentibus cognoscitur reliqua linea et cognoscuntur reliqui anguli. (Fig. 3.)

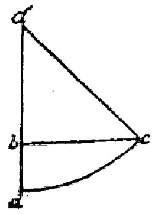

Fig. 3.

Sit *abc* triangulus habens angulum rectum, cuius duæ lineæ scitæ: dico, quod totum residuum est scitum. Quia linea *ac*, quæ subtenditur angulo recto, est in potentia ad duos quadratos reliquarum duarum linearum, quare manifestum est, quod scitis lineis *ab*, *bc* scitur linea *ac*. Et si scitur linea *ac* et una aliarum, scitur tertia, quia ipsa tertia est in potentia ad illud, quod restat de quadrato *ac* subtracto ab eo quadrato alterius lineæ cognitæ. Item dico, quod cognito *abc* angulo recto omnes alii anguli cognoscuntur. Probabo, quod angulus *bac* statim scietur ex notitia inde habita de isto triangulo *abc*. Ad cuius probationem protrahatur linea *ab* usque ad æqualitatem lineæ *ac* usque ad punctum *d*, et fiat de puncto *a* centrum, et signetur cum distantia *ac* arcus *cd*. Et est notum ex dictis, quod linea *bc* est sinus arcus *cd*, et quia duæ lineæ *ac*, *bc* sunt scitæ, est notum, quod quantitas lineæ *bc* est scita in quantitate, in qua linea *ac* habet 60 gradus, et per istam quantitatem, in qua est scita linea *bc*, scitur ex tabula arcuum et sinuum arcus sinus *bc*; quo scito est scitus angulus *bac*, quare et angulus *acb*, quia valent ambo unum rectum.

DE SCIENTIA ANGULORUM CUIUSLIBET TRIANGULI EX COGNITIONE CUNCTORUM LATERUM.

Cognitis tribus lineis cuiusvis trianguli omnes eius angulos cognoscuntur. (Fig. 4 und 5.)

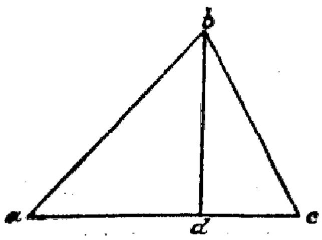

Fig. 4.

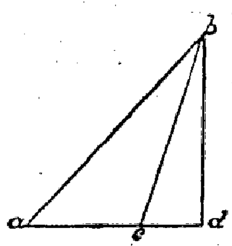

Fig. 5.

Ad cuius probationem sit *abc* prædictus triangulus, et protrahatur a puncto *b* perpendicularis linea *bd* super lineam *ac* positam infinitam. Quæ linea *bd* protracta in prima figura cadit intra triangulum, in secunda vero extra: dico, quod quantitas lineæ *cd* est nota. Quia, si subtrahatur quadratum lineæ *ab* de duabus quadratis linearum *ac*, *bc* in prima figura, aut quadrata linearum *ac*, *cb* de quadrato *ab* in secunda figura, et dividatur residuum per quantitatem duplatam lineæ *ac*, dico, quod divisionis quotiens erit æquale lineæ *cd* aut *dc*, sicut demonstrat EUCLIDES. Ex his est notum, quod quantitas lineæ *dc* est scita, et linea *bc* est scita ex primo supposito, ergo linea *bd* est scita trianguli *bcd* habentis angulum unum rectum, et per consequens omnes eius anguli sunt sciti uterque ex præcedenti propositione. Et hic scimus in prima figura *bca* et unam partem anguli *cba*, quæ pars est angulus *cbd*. In secunda figura scimus angulum *bca* per angulum *bcd*, qui est scitus, quia angulus *bca* est complementum duorum rectorum super angulum *bcd*, qui est scitus. Item, quia lineæ *ac*, *cd* sunt scitæ, est linea *ad* scita, et ex hoc clarum est, quod omnes anguli trianguli *bda* habentis unum angulum rectum, sunt sciti, quia lineæ eius sunt scitæ: ergo quantitas < anguli > *bac* in utraque figura est scita, et scietur angulus *abc*, qui remanet de triangulo, quia anguli *cbd* et *dba* sunt sciti. Unde scitur, quod angulus *abc* in utraque figura est scitus. Ergo est notum, quod cognitis omnibus lineis trianguli *abc* omnes eius anguli cognoscuntur, quod volebam probare.

Ex cognitione duorum laterum et anguli uni lateri oppositi reliqua cognoscuntur.

Cognitis duabus lineis alicuius trianguli et uno angulo eius, cui sit altera dictarum linearum subtensa, reliqua linea et reliqui anguli cognoscuntur. (Fig. 6.)

Sit enim *abc* triangulus, cuius duæ lineæ *ab* et *bc* sunt scitæ, et angulus *bac* sit scitus: dico, quod linea *ac* et anguli, qui remanent, sunt sciti. Ad cuius probationem fiat unus circulus, qui tangat quamlibet angulum trianguli *abc*, qui circulus etiam vocetur *abc*, et ponatur, quod diameter circuli sit linea *ad*. Quia angulus *bac* est scitus et est iuxta circumferentiam circuli, et sunt ibi duo anguli recti 360 gradus, ergo erit scitus arcus *bc*, et inde sciemus ex tabulis arcuum et sinuum chordam arcus prædicti in quantitate, in qua linea *ad* est 120 gradus. Unde scitur ex hoc, quod proportio lineæ *cb* ad lineam *ad* est scita. Et quia proportio lineæ *bc* ad lineam *ab* est scita ex primo supposito, sequitur, quod proportio lineæ *ab* ad lineam *ad* est scita. Ex hoc sequitur, quod scitur quantitas lineæ *ab* in quantitate, in qua linea *ad* est 120 gradus, et ex hoc habemus scientiam arcus *acb* per tabulas arcuum et sinuum. Et quia duo arcus, scilicet *bc* et *acb* sunt sciti, scitus est arcus, qui remanet, qui est arcus *ac*, et inde scimus angulum *abc*; quo scito, et ex primo supposito scito angulo *bac*, scitur tertius angulus, scilicet *acb*. Et inde ex dictis habebimus scientiam

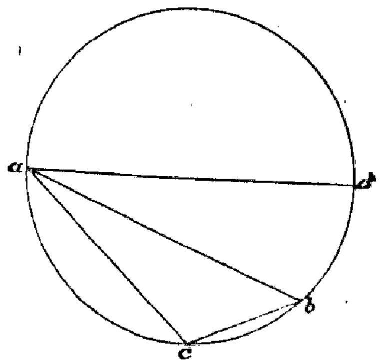

Fig. 6.

lineæ *ac*, unde manifestum est, quod duabus cognitis lineis trianguli *abc*, scilicet *ab* et *bc*, et cognito eius angulo, scilicet *bac*, est scita linea *ac* et < anguli > reliqui, quod volebam probare.

Sequitur ex dictis vel demonstratis ex demonstratione prædicta, quod, si diameter circuli poneretur 60 gradus, et circumferentia 180 gradus; non oporteret computare chordas arcuum in tabulis arcuum et sinuum nisi in quantitate, in qua computantur sinus, qui sinus est medietas chordæ arcus diametri. Unde sequitur, quod proportio sinus arcus ad medietatem diametri est talis, qualis est proportio chordæ alicuius arcus ad diametrum. Ideo ego elegi, quod in locis, in quibus utar demonstratione, inter verba mea sic dictum corollarium accipiatur, quia brevior et magis lucida ex hoc erit. Ideo ex isto loco hoc dixi, ne lector turbetur in istis locis, in quibus utar hoc modo legendi, sic 30 pro 60 et sic uno pro duobus utendo.

Ex isto corollario sequitur, quod *omnium triangulorum rectilineorum talem proportionem una linea habet ad aliam, qualem proportionem unus sinus angulorum, quibus dictæ lineæ sunt subtensæ, habet ad alium.* Ex isto corollario sequitur, quod, *si anguli unius trianguli rectilinei sunt sciti, et si est scita quantitas unius lineæ uni angulo subtensæ, quantitates aliarum linearum etiam sunt scitæ,* quia, si proportio lineæ scitæ ad aliam lineam est scita, ipsa alia linea est scita.

EX COGNITIONE DUORUM LATERUM ET ANGULI AB EIS CONTENTI SCIRE RELIQUA.

Scitis duabus lineis unius trianguli et scito angulo eius consurgente ex coniunctione earum ad invicem reliqua linea et reliqui anguli cognoscuntur. (Siehe Fig. 5 und 6.)

Sit enim *abc* triangulus, cuius lineæ *bc*, *ca* sunt scitæ, et angulus *bca* sit etiam scitus: dico, quod linea *ba* erit scita, et reliqui anguli erunt sciti. Quia angulus *bca* aut est rectus vel acutus vel obtusus. Si rectus, patet conclusio ex dictis superius, si vero acutus, ut in prima figura, vel obtusus, ut in secunda, dico, quod linea *ba* est scita. Ad cuius probationem a puncto *b* super lineam *ca* positam infinitam linea perpendiculariter protrahatur, et quotiens sit, manifestum est, quod angulus *bcd* est scitus, qui est angulus *bca*, qui scitur, ut in prima figura, vel est complementum duorum rectorum super angulum *bca*, qui est scitus, ut in secunda, et sic remanet *dbc* scitus, qui est complementum unius recti super angulum *bcd*. Sequitur, quod omnes anguli trianguli *bcd* sunt sciti, et linea *bc* est scita ex primo supposito: sequitur ergo, quod reliquæ sunt scitæ. Sequitur etiam, quod duæ lineæ *bd*, *da*, sunt scitæ in utraque figura, et ex eis scimus quantitatem lineæ *ab* trianguli *adb*, qui habet unum angulum rectum. Sequitur, quod omnes anguli trianguli *adb* sunt sciti, ergo sequitur, quod scitur angulus *bad* vel *bac*, quod idem est, et ideo, cum angulus *bca* est scitus, ergo angulus *abc*, qui est residuum trium *a*, *b*, *c* est scitus, quia est complementum duorum rectorum super duos angulos *bac*, *bca*, qui sunt sciti; et hoc est, quod volebam probare.

Dass in Obigem eine nette und vollständige ebene Trigonometrie enthalten ist, dürfte einleuchten. Sie weicht in ihrer Darstellung vollständig ab von derjenigen, welche Geber und ihm folgend jener andere anonyme Verfasser einer ebenen Trigonometrie einschlägt, die ich oben erwähnte. Letzterer hat 25 Unterfälle, welche er alle einzeln behandelt. Leo's Beweis des jetzt Sinussatz gennanten Formel ist klar, und er zieht aus ihm alle Folgerungen, welche wir heute noch mit ihm beweisen. Auch von der Behandlung desselben Gegenstandes durch Nasîr-ed-Dîn ist er unabhängig: wir haben also eine ganz selbständige Leistung vor uns.

Das **dritte Capitel** enthält das Princip der *Camera obscura* deutlich dargelegt und für die Beobachtung der Sonnen- und Mondfinsternisse praktisch benutzt. Es wird die Theorie auch geometrisch bewiesen. Ich gehe hier auf dieses Capitel nicht weiter ein, sondern behalte mir die Verwerthung desselben für einen andern Ort und andere Gelegenheit vor. Nur soviel möchte ich feststellen, dass Levi ben Gerson, soweit bis jetzt bekannt, der erste ist, welcher von dieser Vorrichtung Gebrauch macht. Was bisher über die Vorgeschichte der Dunkelkammer bekannt war, findet man bei Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* T. IV, note III aufgeführt.

Das **vierte Capitel** handelt von dem »*centrum visus*». Da der *Baculus Jacob* an das Auge gelegt werden soll, um zunächst die Entfernung zweier Sterne am Himmel direkt zu messen, dabei aber nothwendig ein Fehler der Beobachtung eintreten würde, wenn nicht darauf Rücksicht genommen würde, dass die Sehstrahlen nicht von der Oberfläche des Auges ausgehen, sondern von einem Punkte im Innern des Auges hinter der Linse herkommen, wie Leo durch Experimente nachweist, so hat er, wie er sagt, »*per multas experientias*» gefunden, dass die *visiva potentia* des Auges im Gläskörper *(humiditas congelata)* sich befinde. Um dieses auch geometrisch nachzuweisen, giebt er zu diesem Zwecke die vorläufige Beschreibung des Instrumentes, welche S. Günther in der Biblioth. Mathem. 1890, S. 76—77 hat abdrucken lassen. Ich wiederhole hier diese Beschreibung, indem ich einige Zeilen früher beginne, und füge den Beweis hinzu, welchen Leo für seine Behauptung vorbringt. Es wird sich, glaube ich, dabei ergeben, dass Günther Leo missverstanden hat, und seine Zeichnung des *Secretorum revelator* nicht ganz richtig ist.

»Possum etiam geometrice demonstrare in hoc locum, in quo oculi centrum visus existat, cum instrumento, quod inveni ad experientias locorum planetarum in quovis tempore capiendas. Ideo in hoc loco declarabo de opere instrumenti prædicti, quantum est necessarium pro ista demonstratione habenda. Fiat igitur unus baculus cum superficiebus planis et rectis; in uno capite illius ponatur una tabula, quæ aliqualiter sit cornuta. Eius alterutrum cornu experientiæ tempore sume, alterum in oculum collocato; et fiant multæ tabellæ diversorum quantitatum perforatæ in medio superficies rectas habentes, per quarum foramina intrare possit baculus antedictus, et sit altitudo earum super baculum aliquantulum depressior altitudine oculi, et duæ earum simul ponantur in baculo, una alteri inæqualis ita, quod minor sit propinquior oculo, et ambæ super baculum faciant angulos rectos et sint parallelæ. Et lineæ ab centro oculi procedentes tangant utramque extremitatem utriusque tabellæ et terminentur usque ad cœlum. Hoc autem facto in certitudine nobis possibili sciemus faciliter locum, in quo centrum visus existit. Quia dictæ tabulæ sunt parallelæ et faciunt angulos rectos cum baculo, et lineæ parallelæ intersecant trianguli lineas in tali proportione, qualem parallela una habet ad aliam; et in tali proportione intersecarent omnes lineæ parallelas, quæ essent ab angulo trianguli usque ad lineam ei subtensam vel basim . . . Verbi gratia (Fig. 7) sit *ab* linea recta in longitudine superficiei baculi experientiarum, quæ ab oculo ad caput baculi procedit, et ex parte parallelæ intersecant lineam *ab* suppositam, et sint lineæ *cd* et *ef*, quæ linea *cd* est maior linea *ef*, quia linea *ef* est propinquior oculo. Et sint

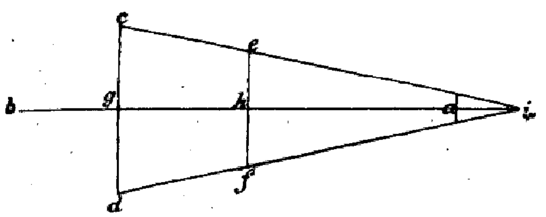

Fig. 7.

sic ordinatæ, quod linea *ef* totaliter et punctualiter occultet lineam *cd* recto oculi < obtentu >; et linea *cd* intersecet lineam *ab* in puncto *g*, et linea *ef* intersecet eam in puncto *h* et protrahantur lineæ *ce* et *df*. Et quia duæ lineæ rectæ *cd* et *ef* sunt visæ ab oculo eiusdem anguli, clarum est, quod, si dictæ lineæ *ce* et *df* protrahantur, in centro visus concurrent, et ponatur, quod concurrant in puncto *i*, et signetur linea *ai*. Manifestum est, quod linea *bai* est una linea recta, quia supposui centrum visus in rectitudine lineæ *ba*. Item quia linea *cg* est æqualis lineæ *gd* et linea *he* est æqualis lineæ *hf*, et linea *gh* est communis ambobus quadrangulis, et angulus *cgh* est æqualis angulo *dgh*, et angulus *ghe* est æqualis angulo *ghf*, manifestum est, quod, si figura *dh* superponeretur figuræ *ch* semper omnia tanguntur, ac si una esset figura. Punctus *d* caderet super punctum *c*, et punctus *f* super punctum *e*, quare manifestum est, quod angulus *gdf* æqualis est angulo *gce*. Unde sequitur, quod triangulus *icd* habet crura æqualia, quia duo eius anguli iuxta basim sunt æquales. Quare manifestum est, quod linea, quæ venit a puncto *i* ad punctum *g*, qui dividit lineam *gc*, intersecat lineam *cd* ad angulos rectos. Sed quia linea *ag* intersecat etiam lineam *cd* ad angulos rectos, sequitur, quod linea producta a puncto *i* ad punctum *g* transeat per punctum *a*; unde sequitur, quod linea *iag* est una linea recta. Et quia triangulus *cdi* habet infra se lineam *ef* parallelam lineæ *cd*, quæ est basis anguli dicti trianguli, manifestum est, quod, qualem proportionem habet linea *ci* ad lineam *ic*, talem habet linea *fc* ad lineam *cd*. Et isto modo probatur, quod, qualem habet proportionem linea *eh* ad lineam *cg*, talem habet *ih* ad lineam *ig*. Et cum commutatur proportio et dividitur, manifestum est, quod proportio, quam habet *cg* ad lineam *eh* est talis, qualem habet differentia lineæ *cg* super lineam *eh* ad lineam *gh*, quæ est differentia, quam habet *ig* super lineam *ih*. Sed differentia, quam habet linea *cg* super lineam *eh* est scita, etiam quantitas lineæ *gh* est scita, nec non et quantitas lineæ *eh* est scita: remanet ergo quantitas lineæ *ih* scita, quia proportio quantitatis lineæ *eh*, quæ est scita, ad lineam *ih* est scita. Et cum profunde cum maximo labore quæsivi veritatem, inveni punctum *i* in isto verbi gratia in centro visus, quod est in centro humiditatis congelatæ. Et ista inquisitio fuit necessaria et valde, quia sine ea non possunt inveniri anguli experientiæ veritatis sine errore, quando respiciuntur cum isto instrumento corpora radiosa, et vellet quis scire arcum distantiæ inter unum et reliquum. Quia, si poneretur centrum visus infra spatium, quod continetur inter *ia*, iudicaretur arcus distantiæ unius ad alterum maior, quam esset, quia angulus experientiæ esset maior, et per oppositum iudicaretur brevior, si dictum centrum poneretur ultra punctum *i*.»

Nun endlich giebt Leo im **fünften Capitel** eine detaillirte Beschreibung seines Instrumentes und die Art der Benutzung desselben zur Bestimmung der Distanz zweier Sterne. Nach dieser Beschreibung ist der Stab rund und nur auf *einer* Seite eine vollständige ebene Fläche vorhanden. Die *tabula cornuta,* es ist überhaupt nur *eine* solche vorhanden, ist an dem Ende des Stabes befestigt, welches an das Auge gelegt werden soll. Sie ist an den Verlängerungen *(cornibus)* abgerundet, damit sie in dem innern Winkel des Auges gelegt werden kann, und dient nur dazu die Lage des Instrumentes in Betreff des Auges sicher zu stellen. Dann, sagt unser Verfasser, liegt das *centrum visus* hinter dieser *tabula* um den 20ten Theil einer Palme im Innern des Auges, wie er *»per experientias multas cum maxima diligentia et labore»* gefunden habe. Der Stab soll vier Palmen lang sein und in solche eingetheilt. Wegen des um den 20ten Theil einer Palme zurücktretenden *centrum visus* muss jedoch die erste Palme um ebensoviel kürzer gemacht werden. Diese kürzere Palme und die nächstfolgende sind nicht weiter einzutheilen, dagegen sind die folgenden durch Querlinien in je 18 Theile, er nennt sie *gradus,* zu theilen. Jeder *gradus* wird auf der einen Seite der ebenen Fläche des Baculus in 12, auf der andern in 6 gleiche Theile getheilt. Darauf zieht er vom Anfange des ersten Theiles der Seite, welche sechs Compartimente enthält, nach dem Anfangspunkte des zweiten Theiles der 12-theiligen Scala, von da wieder nach dem Anfange des zweiten Theiles der 6-theiligen Scala, und dann von dort aus nach dem des 4. Theiles der andern Seite, von dort wieder nach dem 3. Theile der ersten Seite und von da nach dem 6. Theile der zweiten gerade Linien, und so fährt er fort bis zum Ende des Stabes. Dann ist klar, dass jede Transversallinie den 12. Theil eines Grades fasse. Um aber Minuten sicher erkennen zu können, theilt er nach der ganzen Länge des Stabes noch die Breite desselben durch gerade Linien in 5 gleiche Theile, dann sei jeder Theil einer beliebigen Transversallinie gleich einer Minute; in der beistehenden Zeichnung (Fig. 8) gebe ich die Eintheilung zweier *gradus* in Minuten wieder, und bemerke, dass damit das Princip des verjüngten Masstabes vollständig ausgesprochen und praktisch verwendet ist.

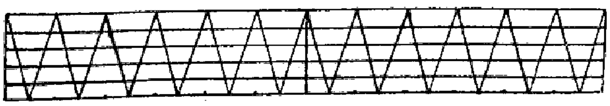

Fig. 8.

Die auf den Stab aufschiebbaren, mit runder Öffnung versehenen Tafeln, damit sie um denselben gedreht werden können, sollen sechs sein. Die Länge derselben wird zu 24 gradus, 16, 12, 8, 4 bestimmt, nur die sechste soll von der einen Seite 2, von der andern nur 1 *gradus* sein. Die Dicke jeder Tafel soll $\frac{1}{3}$ eines Grades betragen, die Höhe aber soll gleich der Entfernung des *centrum visus* von dem Ende des Stabes sein, nur bei der sechsten soll dieselbe auf der einen Seite $\frac{1}{2}$, auf der andern $\frac{1}{4}$ Grad betragen. Der Stab dürfte also beistehende Gestalt gehabt haben (Fig. 9).

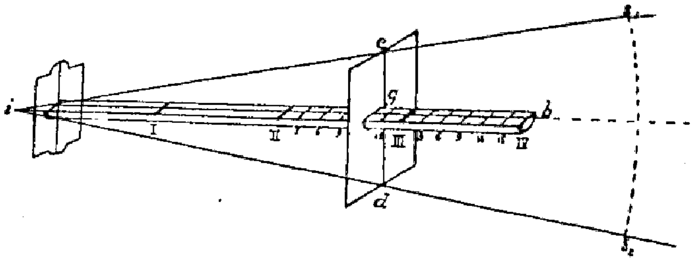

Fig. 9.

Ich habe nur eine *Tabula* ausser der *cornuta* gezeichnet, weil aus dem Folgenden hervorgehen wird, dass LEVI nicht, wie GÜNTHER glaubte, zwei solche *Tabulæ* benutzte. Die *cornuta* ist ja für die eigentliche Beobachtung nicht mitzurechnen, da sie nur die genaue Anlage des Instrumentes an das Auge bewerkstelligen soll. Die Berechnung des Bogens s_1s_2 erfolgt, wie GÜNTHER angegeben, durch die Formel

$$\text{chord } s_1s_2 = \frac{cd}{\sqrt{cg^2 + gi^2}}.$$

LEO nennt dabei $\sqrt{cg^2 + gi^2}$ *semidiameter æquata* und chord s_1s_2 die *chorda æquata*. Sind beide Sterne in der Ekliptik, so ist die gefundene Distanz die *longitudo in zodiaco*, liegen beide Sterne dagegen im Thierkreise, so ist die gefundene Distanz die Breite der Sterne. Liegt ein Stern auf der Ekliptik, der andere nicht, so ist die Distanz die Breite des zweiten Sternes; sind beide ausserhalb der Ekliptik, aber auf derselben Seite derselben, so ist, wenn die Breite des näheren Sternes bekannt ist, die Summe aus Distanz und bekannter Breite die Breite des zweiten Sternes, bei Kenntnis der Breite des weiteren Sternes, die Differenz zwischen Breite und Distanz; liegen die Sterne auf verschiedenen Seiten der Ekliptik, so ist die bekannte Breite von der Distanz zu subtrahieren. Er zeigt dann noch in diesem Capitel, wie bei bekannter Breite aus dieser und der gefundenen Distanz die Länge der Sterne gefunden werden kann.

Im **sechsten Capitel** lehrt er die Meridianhöhe der Sterne, der Sonne und des Mondes finden, die Stunde bestimmen und aus der bekannten Meridianhöhe die Breite des Sternes. Hierzu erhält sein *Baculus* eine neue Einrichtung, er erhält ein Stativ, so dass seine beiden Endflächen horizontal stehen, was durch ein Bleiloth sicher gestellt wird, und auf die obere Endfläche wird eine möglichst dünne kupferne *Tabula,* welche an dem Stabe ein feines Loch hat, aufgeschoben; ebenso andere Tafeln, alle mit ähnlichen Löchern versehen, und nun müssen diese so lange verschoben werden, bis der Strahl des beobachteten Sternes durch beide Löcher in das beobachtende Auge gelangt. Dann liefert eine ähnliche Rechnung wie oben das Gewünschte.

Capitel sieben und **acht** bringen, immer unter neuen Einrichtungen des Stabes, welcher dadurch zu einem sehr complicierten Instrumente wird, weitere Anwendungen desselben zu dem verschiedensten Gebrauche, so dass Leo fast alle astronomischen Beobachtungen mit demselben auszuführen im Stande ist. Hier des weitern mich darauf einzulassen, würde mich zu weit führen. Ich will also nur noch kurz über das **neunte Capitel** referiren, welches die nothwendigen Cautelen bei der Beobachtung nochmals zusammenstellt. Erstens soll man bei nächtlichen Beobachtungen hinter den Kopf ein Licht stellen, damit man die Enden der Mittellinie der aufgesteckten Tafeln genau sehen kann. Man solle zweitens nicht bei nebligen Wetter beobachten, da dadurch die Beobachtung mit vielen Fehlern behaftet werde. Man solle ferner die zu messende Distanz nicht merklich grösser als 30 oder 40 Grade nehmen, da das Auge einen grösseren Winkelabstand nicht leicht übersehen könne. Ist die Breite der Sterne nicht genau bekannt, so darf der Abstand nicht kleiner als 20 Grade genommen werden, *quia in parva distantia parvus error ducit ad magnum et in magna magnus ducit ad parvum.*