Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Wieleitner, Heinrich** (1874–1931)

Titel: **Anton von Braunmühl**

Quelle: Bibliotheca mathematica.
3. Folge, 11. Band (1910), S. 316-330
Seite 316 – 330.
Signatur UB Heidelberg: L 15-7::3.F: 11.1910-11

Die Lebensumstände von *Braunmühls* (geb. den 22. Dezember 1853 zu Tiflis, gestorben den 9. März 1908 in München) bieten kein besonderes Interesse dar und brauchen darum nicht noch einmal erwähnt zu werden. Es genügt, darauf hinzuweisen, daß *Braunmühl* lange Zeit ein hervorragender Lehrer an der Technischen Hochschule in München gewesen ist, daselbst Vorlesungen über Geschichte der Mathematik hielt und 1893 ein mathematisch-historisches Seminar gründete.

Als Schriftsteller hat sich *Braunmühl* mit besonderer Vorliebe, seit 1890 sogar ausschließlich, mit mathematisch-historischen Gegenständen beschäftigt und auf diesem Gebiete wertvolle Arbeiten verfaßt, über die *Wieleitner* ausführlich berichtet. Sein wichtigstes Werk ist die in zwei Bänden 1900 und 1903 veröffentlichte „Geschichte der Trigonometrie“, die er schon 1895 geplant und durch einige 1896–1899 erschienene Einzeluntersuchungen vorbereitet hatte. Das von *Wieleitner* beigefügte „Verzeichris der Veröffentlichungen *A. v. Braunmühls*“ enthält 46 Nummern. Über die betreffenden Schriften ist fast ohne Ausnahme im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ berichtet worden. Als mathematisch-historischer Verfasser zeichnete sich *Braunmühl* durch umfassende und gewissenhafte Quellenstudien sowie durch eine vorzügliche Darstellungsweise aus.

(Rezension von Gustaf Eneström (1852–1923) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 41, 1910)

A. v. Braunmühl

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM.

3. FOLGE. ELFTER BAND.

MIT DEM BILDNIS VON A. v. BRAUNMÜHL ALS TITELBILD
SOWIE 2 FAKSIMILES IM TEXT UND 74 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1910—1911.

Anton von Braunmühl.

Von Heinrich Wieleitner in Pirmasens.

Anton von Braunmühl entstammte einem alten bayrischen Geschlechte. Sein gleichnamiger Vater aber, ein vielversprechender Schüler des von König Ludwig I. von Bayern so bevorzugten Architekten Friedrich von Gärtner, war von der russischen Krone nach Tiflis berufen worden, dort ein Thronfolgerpalais zu erbauen. So kam es, daß Anton von Braunmühl in der Hauptstadt Transkaukasiens, am 22. Dezember 1853 (neuen Stils), geboren wurde. Schon drei Jahre später riß ein plötzlicher Tod seinen Vater im 36. Lebensjahre mitten aus seiner Tätigkeit. Die Mutter kehrte mit dem Knaben nach München zurück, das letzterer nun nicht mehr verlassen sollte. Auch die Mutter besaß der schwächliche Knabe, der wegen fortwährender Krankheit die Volksschule nur ganz kurze Zeit besuchen konnte, nicht zu lange. Immerhin stand sie ihm noch auf der größeren Strecke des Gymnasialweges, den A. v. Braunmühl am K. Ludwigsgymnasium durchlief, zur Seite. Nach ihrem Tode, der etwa 10 Jahre nach dem ihres Gatten erfolgte, nahm ein Onkel, noch mehr als schon bis dahin, sich des jungen Mannes an, der im Jahre 1873 das Gymnasium mit sehr gutem Zeugnisse verließ.

Er immatrikulierte sich nun an der K. Universität München, hörte dort Mathematik, Physik und Astronomie bei G. Bauer, L. von Seidel, Ph. von Jolly, J. von Lamont und Fr. Narr, Literaturgeschichte bei M. Bernays und Kulturgeschichte bei B. Riehl. Gleichzeitig besuchte er als Hospitant, wie das in München bei Lehramtskandidaten auch heute noch üblich ist, mathematisch-physikalische Vorlesungen an der K. Technischen Hochschule (damals noch „Polytechnikum" genannt), und zwar bei A. Brill, F. Klein, J. N. Bischoff und W. Beetz. Im Herbst 1877 unterzog er sich der Prüfung für das Lehramt in Mathematik und Physik, die er gut bestand und, wie damals gefordert, durch Ablegung einer „Spezialprüfung", zu der eine wissenschaftliche Arbeit eingereicht werden mußte, im darauf folgenden Jahre ergänzte. Mit der gleichen

Arbeit [2][1]) promovierte er am 3. August 1878 an der K. Universität und erwarb das Prädikat „summa cum laude". Unterdessen war A. v. Braunmühl schon im Staatsdienste verwendet worden und zwar vom 9. Nov. 1877 bis 25. Sept. 1878 als Assistent am K. Realgymnasium und aushilfsweise im Januar, Februar und März des Jahres 1878 an der K. Industrieschule München, deren Rektor Kleinfeller in einem glänzenden Zeugnis schon damals ein besonders hervortretendes Lehrtalent betonte. Vom 25. Sept. 1878 an wurde A. v. Braunmühl zum Lehramtsverweser an der damals einzigen K. Realschule (jetzigen Ludwigskreisrealschule) ernannt, welche Stelle vom 1. Juli 1879 an in die endgültige eines K. Reallehrers umgewandelt wurde. Am 1. Januar 1885 trat er an das K. Maximiliansgymnasium unter dem Titel K. Studienlehrer über, nachdem er sich kurz vorher, am 11. Juli 1884, an der K. Technischen Hochschule die venia legendi erworben hatte.

Diese anstrengende Doppelstellung als Mittelschullehrer und Privatdozent behielt A. v. Braunmühl bei bis zum 1. Nov. 1888, wo Professor Bischoff in den Ruhestand trat, an dessen Stelle der junge Gelehrte zum Extraordinarius an der K. Technischen Hochschule ernannt wurde, mit dem Auftrage, über „Algebraische Analysis und Trigonometrie", sowie über „Projektivische Geometrie in synthetischer Behandlung" zu lesen. Der 1. Juni 1892 brachte ihm die Beförderung zum ordentlichen Professor ohne Änderung des Lehrauftrages. Von 1903/4 ab trat erst hierin eine Änderung ein, indem die allgemeine Vorlesung über höhere Mathematik in 4 Teile geteilt und eine Vorlesung „Grundzüge der höheren Mathematik für Architekten und Chemiker" hinzugefügt wurde, welcher Vorlesungskomplex jetzt den drei Ordinarien (W. v. Dyck, S. Finsterwalder und v. Braunmühl) gleichmäßig übertragen wurde, so daß v. Braunmühl 1903/4 die „Grundzüge", 1904/5 „Höhere Mathematik I. u. II. Teil", 1905/6 „Höhere Mathematik III. u. IV. Teil" las. Daneben liefen noch abwechselnd die zwei schon erwähnten Vorlesungen, zu denen er 1905/6 eine solche über „Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie" fügte. Aber es war ihm nicht vergönnt, den dreijährigen Zyklus öfter als einmal ganz durchzumachen. Am 7. März 1908 entriß ihn der Tod seinen Schülern, seiner Familie und der Wissenschaft. Im Februar noch hatte er sich mit äußerster Anstrengung in den Vorlesungen aufrecht erhalten.

Zu dieser öffentlichen Pflichttätigkeit fügte der Verblichene, wie ja allen Lesern dieser Zeitschrift wohlbekannt ist, noch eine selbstgewählte, die ihm innerlich sicher bald zur Hauptsache wurde. Schon im Winter-

1) Die eingeklammerten Ziffern beziehen sich auf das am Schlusse der Abhandlung beigefügte Verzeichnis der Veröffentlichungen A. v. Braunmühls.

semester 1893/4 begann er eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik, von den ältesten Zeiten bis zur Mitte des Zeitalters der Renaissance, zu halten, der sich im Wintersemester des darauf folgenden Jahres eine ebensolche anschloß, die die Zeit vom Beginn der Renaissance bis zur Mitte des 17. Jahrh. umfaßte. Gleichzeitig begründete er im Wintersemester 1893/4 sein einzig dastehendes mathematisch-historisches Seminar, das er bis an sein Lebensende ununterbrochen führte [22]. Dort hielt er entweder selbst Vorträge, teils wies er vorgerückteren Teilnehmern Themata zu, in deren Behandlung Quellenstudien verlangt wurden. In den nächsten Jahren bildete sich ein Stamm von älteren Herren in diesem Seminar, Lehrern an Münchener Mittelschulen und Assistenten der Technischen Hochschule, um den sich Studierende verschiedener Semester und sogar einige Techniker gruppierten [29]. Auf diese Weise entstanden wertvolle Veröffentlichungen von W. END über die Geschichte der Dezimalbrüche, von ST. CHRZASZCZEWSKI (später HALLER) über DESARGUES, von W. KUTTA über die Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung. Füllten die Vorträge der Teilnehmer nicht das ganze Semester aus, so ergänzte er die Lücken selbst durch Referate über eigene Studien. In diesen Jahren — 1895/96 — hielt er auch die erste (einstündige) Spezialvorlesung über Geschichte der Trigonometrie, die er fast ganz aus den Quellen heraus arbeitete, aber zunächst nur bis REGIOMONTAN führen konnte. Die direkte Frucht davon für die breitere Öffentlichkeit waren zwei Abhandlungen [27, 28], auf die wir noch unten zu sprechen kommen. Zum letzten Male berichtete er über sein geliebtes Seminar im Jahre 1904 [43]. Dieses war unterdessen zu einem zweistündigen ausgestaltet worden. Seit 1899 waren Zyklen von Vorträgen eingerichtet, die zwei Semester umfaßten. Der erste Zyklus behandelte die Geschichte der Quadratur des Kreises von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, der zweite die ersten Anfänge des Infinitesimalkalküls, beginnend mit der Antike und endigend mit den Entdeckungen von NEWTON und LEIBNIZ. Der dritte Zyklus setzte die Geschichte der Differential- und Integralrechnung von LEIBNIZ und NEWTON an bis auf GAUSS fort, während der vierte sich mit der Geschichte der Geometrie im 16. und 17. Jahrhundert und im besonderen mit der Entstehung der analytischen Geometrie befaßte. Ein fünfter Zyklus entwickelte die Geschichte der unendlichen Reihen seit N. MERCATOR und NEWTON bis auf unsere Tage. Zu den schon erwähnten Schülern kamen A. A. BJÖRNBO, G. HEINRICH und C. R. WALLNER hinzu, die mit eigenen Arbeiten an die Öffentlichkeit traten.

Bevor wir uns zu den wissenschaftlichen Veröffentlichungen A. v. BRAUNMÜHLS wenden, noch einige Worte über sein Leben. Die Gesundheit des ursprünglich schwächlichen Knaben hatte sich offenbar während der Jünglingsjahre gekräftigt und wir sehen in dem reifen Manne einen ausdauernden Fußgänger und Bergsteiger, der auch im Dienst den Begriff Schonung nicht kannte. Lauten Freuden abhold, hatte er sich seit 1879 ein ruhiges Familienglück gesichert, wo er Fräulein Fanny Stölzl, einer Beamtenstochter, die Hand am Altare reichte. Drei Mädchen entsprossen dieser Ehe. Aber nur zwei erwachsene Töchter trauerten an des Vaters Bahre. Im Blütenalter von 17 Jahren hatte im Jahre 1902 der Tod die jüngste Tochter hinweggerafft. Dies war ein harter Schlag für den bis dahin gesunden Mann. Es ist nicht ausgeschlossen, daß ein Nierenleiden, das schließlich seinen Tod herbeiführte, von da ab infolge öfterer Gedrücktheit seiner Seele auch leichter Einfluß auf seinen Körper gewann. An äußeren Ehren, die dem Verlebten zuteil wurden, sind nur seine Aufnahme in die Leopoldinisch-Karolinische Akademie (1897) und die Verleihung des Verdienstordens vom hl. Michael IV. Klasse (1904) zu erwähnen. Die größte Ehrung aber, die einem Lehrer widerfahren kann, das ist die Anhänglichkeit und Dankbarkeit seiner Schüler. Hieran hat es v. Braunmühl nie gefehlt, ebensowenig, wie an dem Vertrauen und der Freundschaft der Kollegen, die dem schon nicht mehr auf der Höhe der Leistungsfähigkeit stehenden Manne 1904—1907 das arbeitsreiche Amt des Vorstandes der Allgemeinen Abteilung der K. Technischen Hochschule übertrugen.

Überblicken wir nun die Reihe der Veröffentlichungen des Dahingegangenen, so sind diese sehr leicht zu klassifizieren. Seine ersten Arbeiten beziehen sich mit einer Ausnahme [6] durchweg auf die Differentialgeometrie der geodätischen Linien [2—5, 8—10], denen er auch durch Modelle Anschaulichkeit verlieh [1, 7]. Um diese Linien auf beliebige Erstreckung hin rechnerisch zu verfolgen, bedurfte er der elliptischen und hyperelliptischen Transzendenten, und er erweiterte hier insbesondere das Formelsystem für Thetafunktionen mit gebrochenen Charakteristiken [11—14]. Mit diesen Arbeiten, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, ist um 1890 die rein mathematische Periode abgeschlossen. Von da ab ist alles Weitere entweder biographisch oder historisch, und zwar beschränkte sich diese Arbeitsrichtung nicht auf die reine Mathematik, sondern umfaßte mit die Astronomie, über die A. v. Braunmühl im Münchener Volkshochschulverein gelegentlich auch einen Zyklus von 6 Vorträgen hielt. Dieser Zug hat seine Studien zur Geschichte der Trigonometrie sehr günstig beeinflußt, in der man bis dahin, wie er selbst sagt [29], den astronomischen Werken, die oft die einzige Quelle darstellen, zu wenig Beachtung geschenkt hatte.

Seine erste biographisch-historische Arbeit über den im bayrischen Schwaben geborenen Jesuiten Christoph Scheiner [17], kam als 24. Bändchen der von A. v. Braunmühls Kollegen K. v. Reinhardstoettner und dem Münchener Archivar und Lokalforscher K. Trautmann begründeten Bayerischen Bibliothek heraus. Sie bot dem Verfasser gleich Gelegenheit genug, sich mit astronomisch-historischen Fragen zu beschäftigen, hier insbesondere mit der Entdeckung der Sonnenflecken. Mit großer Objektivität erkennt er Galilei die Priorität vor Scheiner, letzterem die Unabhängigkeit zu, Johann Fabricius aber die Priorität der Veröffentlichung. Das Büchlein zeigt schon einen der Hauptvorzüge seines Verfassers aufs deutlichste: die Fähigkeit, ein gewaltiges Material klar zu übersehen und die Ergebnisse unter Beiseiteschiebung alles Sekundären auf knappem Raume leicht lesbar darzustellen. Mit dieser Arbeit in engem Zusammenhange stehen zwei kleinere Notizen über die Entdeckung der Sonnenflecken [15, 20], die A. v. Braunmühl bald darauf durch die Veröffentlichung eines in der Münchener Universitätsbibliothek aufgefundenen Beobachtungsmaterials [21] wesentlich ergänzen konnte. Durch den letzteren Fund wurde es auch fast sichergestellt, daß Scheiner, erbittert durch die heftigen und ungerechten Angriffe Galileis gegen ihn, wirklich die Rolle des Anzeigers in jenem unseligen Prozesse gegen den großen Forscher gespielt hat, dem A. v. Braunmühl um dieselbe Zeit eine eigene Monographie widmete [19].

Nicht weit ab von Galilei liegt eine biographische Skizze über Nikolaus Coppernicus [24], in der das historische Moment stark hervortritt, und eine geschichtliche Darstellung der Theorien über die Entstehung des Sonnensystems [31], die sich wieder durch ruhige Sachlichkeit besonders auszeichnet. Scharf charakterisiert dort v. Braunmühl den tiefgreifenden Unterschied zwischen der Kantschen und der Laplaceschen Hypothese, die eigentlich nur die Buffon angehörige Idee der Einheit der Weltmaterie gemeinsam hätten, geht dann genauer auf Lockyers Kosmogonie ein und auf die Modifikationen, die G. H. Darwin an dieser Theorie anbrachte, um sie mit der Laplaceschen in Einklang zu bringen. Für letztere tritt er selbst lebhaft ein, nicht ohne auf die Möglichkeit ihrer Ersetzung durch eine andere, bessere hinzuweisen, aber erst, wenn die Grenzen unseres Erkennens noch wesentlich weiter hinaus gerückt würden.

Eine Reihe von Nekrologen in Bettelheims Biographischem Jahrbuch auf in der Neuzeit verstorbene Mathematiker und Physiker, wie Franz Neumann und Christian Wiener [26], dessen wenig bekanntes, philosophisches Werk *Die Grundzüge der Weltordnung* (1863) besonders hervorgehoben wird, auf seinen Kollegen L. Sohncke, auf K. Weierstrass und L. v. Seidel [32], dann noch auf S. Lie [36] schließen sich hier an. Überall nimmt der Verfasser Veranlassung, die Eigenschaften vor allem herauszuheben, die ihn selbst am meisten zierten, die Zurückhaltung und Neidlosigkeit des Forschers und die Fähigkeit, Schüler zu fesseln. „Alle Schüler hingen mit unbegrenzter Liebe und Verehrung an dem Meister", sagt er bei WEIERSTRASS gleichsam von sich selbst. Nur bei S. LIE fehlt ein solcher Hinweis. Aus freundschaftlicher Zuneigung entstand der Nachruf für den Kollegen L. MUGGENTHALER [25], einem Festvortrag zum 30. Stiftungsfest des Akademisch-mathematischen Vereins München, am 28. Juni 1907, dankt die Skizze über EULER [45], A. v. BRAUNMÜHLS letzte Veröffentlichung, ihre Entstehung. Auch hieraus möchten wir die Bemerkung anführen, daß EULER stets lehren und als Lehrer verstanden sein wollte und ihm alles Überraschen- und Verblüffenwollen ferngelegen sei.

Wenn wir nun zu den eigentlich historischen Arbeiten übergehen, so ist als erste die ausgezeichnete Studie über organische Kurvenerzeugung [18] zu erwähnen, der eine Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel [16] vorausgegangen war. Direkt veranlaßt jedenfalls durch die Ausstellung von Modellen und Instrumenten, die die Deutsche Mathematikervereinigung gelegentlich ihrer Jahresversammlung 1892 in München veranstaltete, steht die Abhandlung auch mit der SCHEINERbiographie in Zusammenhang durch einen von diesem Gelehrten zum Zeichnen der Schattenkurven konstruierten Kegelschnittzirkel, dessen Grundidee allerdings schon von dem Venetianer F. BAROZZI (1566) und den Arabern benutzt worden war. Der Bericht v. BRAUNMÜHLS ist natürlich mehr mathematisch als technisch, er bespricht auch die Einteilung der Kurven bei den Alten in ebene, körperliche und lineare Örter, die Kritik dieser Einteilung durch DESCARTES und den Einfluß der Entdeckung der analytischen Geometrie, sowie der Infinitesimalrechnung auf die Konstruktion alter und neuer Kurven. Die doppelte Erzeugung der zykloidalen Kurven (DE LAHIRE 1699), Evoluten und Evolventen, Traktorien, TSCHIRNHAUS' Fokalkurven, die Kardioide, die logarithmische Linie und viele andere spezielle Kurven treten auf. Der Aufsatz schließt mit der Besprechung von NEWTONS *Enumeratio* (1704), mit MACLAURINS und BRAIKENRIDGES Erzeugungsweisen, mit der sauberen Trennung von Geometrie und Mechanik durch D'ALEMBERT und EULER.

Um diese Zeit, oder wenig später, muß v. BRAUNMÜHL den Plan gefaßt haben, eine Geschichte der Trigonometrie zu schreiben. Der erste öffentliche Hinweis auf das zu erwartende Werk findet sich in der Mitteilung [22] im Jahre 1895. Es erschien eine Reihe von Einzeluntersuchungen, in deren Mitte die zwei großen Aufsätze [27, 28] der Leopoldinisch-Karolinischen Abhandlungen von 1897 stehen. Sie werden flankiert von kleineren Notizen über die prosthaphäretische Methode [23, 33] und das sphärische Polardreieck [30], die sich alle noch auf die Zeit vor Erfindung der Logarithmen beziehen. Das war auch die Grenze, die sich der Verfasser in dem 1900 erschienenen ersten Band seines Werkes [34] steckte. In den *Beiträgen zur Geschichte der Trigonometrie* [27] wandte v. Braunmühl hauptsächlich der von den Historikern vorher ziemlich vernachlässigten graphischen Methode sein Augenmerk zu die in dem Analemma des Ptolemäus wurzelte und deren Kern darin bestand, daß man die Himmelskugel auf drei zueinander senkrechte Ebenen: die Meridianebene, die Horizontebene und die Ebene des ersten Vertikals orthogonal projizierte. Die Verwendung und Umformung dieser Methode bei den Griechen, Indern und Arabern wird ausführlich dargelegt. Von großer Wichtigkeit ist der daraus hervorgehende Nachweis, daß entgegen der Meinung von Delambre, Hankel und Cantor die Araber kein Rechenverfahren zur Umformung trigonometrischer Ausdrücke hatten, sondern daß sie alles mittels der geschilderten Projektionsmethode ableiteten, die überall den zweiten Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie ersetzte. So kam es auch, daß dieser Satz, der in dunkler Form schon bei Al Battânî vorkommt, erst von Regiomontan, der eine mittelalterliche lateinische Übersetzung von Al Battânîs Werk über die Bewegung der Sterne mit einem Kommentar versah (1537 nach dem Tode Regiomontans erschienen) als ein für jedes Dreieck gültiger Satz herausgeschält wurde. Diese Tatsache war bis dahin nicht genügend gewürdigt worden.

Regiomontan war überhaupt der erste, der erkannte, daß sich alle trigonometrischen Probleme auf ebene oder sphärische Dreiecksaufgaben zurückführen lassen. Das wird in dem zweiten der größeren Aufsätze [28] näher ausgeführt, der einen Vergleich zwischen diesem großen Reorganisator des Westens gibt mit dem ebenso großen, um etwa 200 Jahre früheren, des Ostens: Naṣîr Eddîn Ṭûsî. Die beiden Werke *De triangulis omnimodis libri quinque* und das *Schakl al Kaṭṭâ* werden einander gegenübergestellt und nach Inhalt und Methode gegeneinander abgewogen, nachdem die Unabhängigkeit des Deutschen von dem Araber sicher gestellt wurde. Das letztere Werk wird als das erste, von Astronomie freie, rein systematische Lehrbuch der Trigonometrie hingestellt, in Erfindung und Darstellung den „fünf Büchern" Regiomontans vielfach überlegen, die hingegen, Lehr- und Übungsbuch zu gleicher Zeit, von einer weit größeren Wirksamkeit sein konnten, da ihr Verfasser an die praktischen Aufgaben wirklich herantrat. Naṣîr Eddîn charakterisiere so den Abschluß einer bereits fertigen Entwicklungsstufe, Regiomontan aber bedeute den Beginn einer neuen Periode.

In dem kleineren Aufsatze [23] wird zuerst gezeigt, daß die prosthaphäretische Methode den Arabern durchaus bekannt gewesen sei, daß sie dieselbe aber eben nicht formelmäßig verwendeten (eine Andeutung erst bei Ibn Jûnos († 1008)), sondern aus ihrer dem Analemma entnommenen

Projektionsfigur entnahmen. Im Abendlande sei aber JOHANNES WERNER († 1528) aus Nürnberg der erste gewesen, der die prosthaphäretischen Formeln zuerst aufgestellt habe. Hierfür wird das Zeugnis des Heidelberger Professors J. CHRISTMANN angeführt, da WERNERS 5 Dreiecksbücher damals noch verschollen waren.[1]) Im zweiten Aufsatze über diese Methode [33] wird ihre Wiederentdeckung und Verwendung durch TYCHO BRAHE und PAUL WITTICH (um 1580) geschildert, die Beweise BÜRGIS und die durch diesen und MELCHIOR JOESTEL an der Methode angebrachten Verbesserungen besprochen. Wie schwer sich die Astronomen auch nach Erfindung der Logarithmen von der liebgewordenen Methode trennten, wird gezeigt, indem der Verfasser nachweist, daß sie 1634 und 1636 noch benutzt und ausführlich gelehrt wurde. Bezüglich des sphärischen Polardreiecks wies v. BRAUNMÜHL durch eine eingehende Analyse der hierauf bezüglichen Ausführungen bei VIETA nach, daß dieser zweifellos schon 1593 den Zusammenhang zwischen sphärischem Dreieck und Supplementardreieck klar durchschaute, und daß nur seine Neigung, neue Entdeckungen in möglichst rätselhafte Form zu kleiden, diese Tatsache verdunkelt habe.

Dies sind auch die wesentlichsten Punkte, in denen die Darstellung der Geschichte der Trigonometrie im I. Bande der v. BRAUNMÜHLschen *Vorlesungen* [34] von der bis dahin üblichen Auffassung abwich, wie der Verfasser selbst im Vorwort andeutete. Durch genaue Quellenvergleichung wurden natürlich auch viele kleinere Einzelheiten sichergestellt oder berichtigt, worauf wir hier nicht eingehen können.

Schon 3 Jahre nach dem Erscheinen des ersten Bandes kam der zweite heraus [40], so daß nur wenig Vorarbeiten inzwischen veröffentlicht werden konnten. Von großem Interesse bleibt aber auch neben dem fertigen Buche die Abhandlung über die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie [35], in der von den ersten Abkürzungen an (nämlich sin 1^m arcus für sin und sin 2^m arcus für cos), die der Verfasser in der von MAUROLICO 1558 herausgegebenen Sphärik des MENELAOS fand, bis zu der einheitlichen Bezeichnungsweise EULERS all die vielen Stufen beschrieben sind, die durchlaufen werden mußten, oder wenigstens durchlaufen wurden, bevor die Terminologie eine feste wurde. Einschlägig sind außerdem noch zwei Arbeiten. In der einen [38] weist v. BRAUNMÜHL nach, daß DE MOIVRE seinen Satz nicht erst 1730 in den *Miscellanea analytica*, sondern, wenn auch noch etwas dunkler, schon 1707 und 1722 in den Philosophical transactions angegeben, ihn aber in der allgemeinsten Weise, der nur die durch EULER üblich gewordene

1) Die Handschrift der WERNERschen Arbeit wurde von A. A. BJÖRNBO 1902 wiedergefunden und 1907 zum Abdruck gebracht.

Form noch fehlte, erst in den Philosophical transactions für 1738 begründet habe. Die andere Arbeit macht zunächst verschiedene Werke namhaft, in denen die sogenannten MOLLWEIDEschen Gleichungen lange vor MOLLWEIDE (1808) auch der Form nach genau enthalten sind, und der Verfasser findet als ersten Autor F. W. OPPEL (1746) für beide, während die eine schon bei NEWTON (1707) vorkommt. OPPEL hat auch, wie im zweiten Teile derselben Arbeit gezeigt wird, als erster die Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie aus dem umgelegten Netz des Dreikants abgeleitet, nachdem für den Kosinussatz dasselbe schon von J. CASWELL (um 1690) geleistet worden war. OPPEL habe auch hervorgehoben, daß aus Sinus- und Kosinussatz alle übrigen Formeln hervorgingen, und gezeigt, wie man zu jeder von ihnen mittels des Supplementardreikants die reziproke finden könne. A. v. BRAUNMÜHL hat aber in dem zweiten Bande der *Vorlesungen* nicht, wie fast alle Historiker, an der Schwelle des 19. Jahrhunderts haltgemacht, sondern ist mutig darübergeschritten und hat die Geschichte der Trigonometrie bis zum Abschluß des Manuskriptes hin weitergeführt. Freilich klagt er im Vorwort, daß dies nur habe geschehen können unter beständigem Kampf mit der Fülle des ins Enorme gewachsenen Stoffes, da die Trigonometrie im Laufe der Zeit mit einer ganzen Reihe anderer mathematischer Wissensgebiete in engste Fühlung getreten sei. Und er sagt, es sei dies überhaupt nur möglich gewesen, indem er nach subjektivem Empfinden eine gewisse Grenze gezogen habe. Wiederum zeigt sich so bei diesem Bande, der doppelt so umfangreich leichter zu schreiben gewesen wäre, die große Kunst des Meisters in der Beschränkung.

Um bei der Trigonometrie zu bleiben, sei gleich hinzugefügt, daß, als M. CANTOR sich anschickte, seinen dreibändigen *Vorlesungen* einen vierten (Sammel-)Band, der von 1759 bis 1799 reichen sollte, nachfolgen zu lassen, natürlich A. v. BRAUNMÜHL den Abschnitt: Trigonometrie, Polygonometrie und Tafeln [44] übernahm. Dieser Abschnitt enthält ja begreiflicherweise, da er sichtlich schon 1904 verfaßt wurde, nichts wesentlich Neues; doch wurden z. B. die Gesamtleistungen J. H. LAMBERTS und die Beziehungen zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen in gerundeterer Form dargestellt und auch manche Einzelheiten verbessert.

Außer diesen trigonometrischen Arbeiten hat v. BRAUNMÜHL noch drei andere mathematisch-historischen Inhalts veröffentlicht. Die eine bezieht sich auf die Geschichte der Interpolationsformeln [37]. Zwar hatte hier schon G. ENESTRÖM die Haupttatsachen bis 1715 klargelegt.[1])

1) *Differenskalkylens historia I.* Upsala univ. årsskr. 1879. Vgl. auch die *Notes historiques sur la formule générale d'interpolation de NEWTON* von P. MANSION und G. ENESTRÖM; Bibl. math. 1886, Sp. 141—144.

Diese Abhandlung war aber wenig gelesen worden, so daß v. Braunmühl auf Grund eigener Forschungen die Eneströmschen Resultate bestätigte und erweitert darlegte. Es handelte sich vor allem um den Nachweis, daß weder Stirling noch Cotes eigene Interpolationsformeln jemals aufstellten, sondern daß beide nur solche Formeln mitteilten und bewiesen, die schon Newton angehören. Und zwar hat Newton allein deren sechs gegeben, zwei, die gewöhnlich nach ihm benannt werden, in den *Principia* (1687), vier andere in der *Methodus differentialis* (1711). Unter den letzteren befinden sich die zwei für die sog. Interpolation aus der Mitte, die schon E. Waring (1779) fälschlich Stirling zuschrieb. Alle genannten Autoren neben anderen befaßten sich aber nur mit dem Beweise der ersten zwei Newtonschen Formeln. Erst Theoph. Walz gab, wie v. Braunmühl weiter ausführt, 1745 und 1746 Beweise für die vier ersten Newtonschen Formeln und 1758 ganz ähnlich Ch. Walmesley. Zum Schlusse weist der Verfasser auf die „interessante Tatsache" hin, daß die sog. Lagrangesche Interpolationsformel bereits 1779 von E. Waring gegeben worden sei, sogar mit Herleitung, die bei Lagrange fehlt.

Eine zweite Abhandlung [41] beschäftigte sich mit der Behandlung der sog. trinomischen Integrale

$$(1)\qquad a\int z^{n\eta-1}\sqrt{Z}\,dz \quad \text{und} \quad a\int \frac{z^{(n+1)\eta-1}}{\sqrt{Z}}\,dz,$$

für $n = 0, 1, 2, 3$ und $Z = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$ durch Newton (1671 und 1704), der sich damit begnügte, gewisse Flächenstücke von Ellipsen oder Hyperbeln anzugeben, die durch sie ausgedrückt werden. Die Quadratur dieser Flächenstücke setzte er entweder als geometrisch bekannt voraus, oder er dachte sie sich durch die von ihm gelehrte Methode der Reihenentwicklung geleistet. Roger Cotes ging einen bedeutenden Schritt weiter, indem er solche Integrale auf logarithmische und Kreisfunktionen zurückführte und sie so direkt der rechnerischen Behandlung mit logarithmisch-trigonometrischen Tafeln zugänglich machte (1714). Insbesondere fanden sich im Nachlaß von Cotes weitere Materialien, auch für etwas allgemeinere Klassen von Integralen, die R. Smith in der *Harmonia mensurarum* (1722) zu einer Sammlung von 94 Integraltafeln ausbaute, von denen 6 sich auf trinomische Integrale bezogen. Es ist bekannt, daß Cotes in der *Harmonia mensurarum* jene später nicht-euklidisch genannte Maßbestimmung einführte, und daß in derselben Schrift die fundamentale Beziehung

$$(2)\qquad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

auftritt Der Verfasser gibt genauere Ausführungen über den Gedankengang COTES' und den Zusammenhang mit den in Rede stehenden Integralen.

Mit der letzten hier zu besprechenden Abhandlung [42] trat v. BRAUNMÜHL eigentlich zum erstenmal persönlich in die Öffentlichkeit, indem er auf dem III. Intern. Mathematiker-Kongreß über das erste Auftreten einer PFAFFschen Differentialgleichung

$$2\,dx - dz + x\,dy = 0 \tag{3}$$

in NEWTONS *Methodus fluxionum* (verfaßt um 1670/71) und über das erste Vorkommen von partiellen Differentialgleichungen vortrug. NEWTON hatte den Charakter der Gleichung (3) ganz richtig erkannt und angegeben, daß zwischen zweien der Variablen, etwa x und y, eine ganz beliebige Relation angenommen werden müsse. Nur war ihm, mangels einer Funktionsbezeichnung, die allgemeine Durchrechnung noch unmöglich und auch an eine geometrische Interpretation konnte er sich nicht wagen. Die erste partielle Differentialgleichung stieß EULER auf, da er (1740) die Differentialgleichung

$$dz + P\,dx = 0 \tag{4}$$

durch einen Multiplikator R zu einer Totalen zu machen suchte. Er erhielt in unserer Schreibweise die Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{P\,\partial R}{\partial z} + \frac{R\,\partial P}{\partial z}, \tag{5}$$

und löste sie gleich in der heute noch üblichen Weise. Auf diese Feststellung folgen noch weitere Bemerkungen über die systematische Behandlung der partiellen Differentialgleichungen durch d'ALEMBERT, EULER und LAPLACE.

Der Heidelberger Kongreß hatte auf v. BRAUNMÜHL einen so guten Eindruck gemacht, daß er beschloß, auch den nächsten Internationalen Kongreß im Jahre 1908 in Rom zu besuchen. Aber als am 6. April dieses Jahres der Sindaco von Rom, Herr ERNST NATHAN, die Erschienenen im Konservatorenpalaste begrüßte, da lag v. BRAUNMÜHL schon seit 4 Wochen unter dem kühlen Rasen. Manche Pläne waren mit ihm ins Grab gesunken. So hatte er mit der Verlagsbuchhandlung Vieweg und Sohn in Braunschweig wegen einer Geschichte der Differentialgleichungen abgeschlossen. Aber eine bedeutende, wenn auch unvollendete Arbeit fand sich noch in seinem Nachlasse. Schon 1902 las man auf dem Vorsatzpapier der ersten Auflage des Bändchens *Niedere Analysis*, I. Teil, von H. SCHUBERT, daß für die „Sammlung SCHUBERT" auch eine *Geschichte der Mathematik* von A. v. BRAUNMÜHL und S. GÜNTHER in Aussicht genommen sei. Die beiden befreundeten Gelehrten hatten vereinbart, diese

Arbeit auf zwei Bände der Sammlung zu verteilen, so zwar, daß S. Günther die ältere Geschichte bis zum Auftreten Descartes' und des Infinitesimalgedankens, A. v. Braunmühl aber die neuere Entwicklung, abschließend mit dem 18. Jahrhundert, in Angriff nehmen sollte. Erst im Jahre 1908 erschien Günthers Band, und ein eigentümlicher Zufall wollte es, daß sein Verfasser die Sendung vom Verleger gerade am Todestage des Freundes erhielt. Die Durchsicht des Nachlasses ergab nun, daß der Verewigte schon größere Teile seiner Arbeit ausgearbeitet hatte, insbesondere die Kapitel Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie, Infinitesimalrechnung und Differentialgleichungen. Ganz fehlten noch Geometrie und Trigonometrie, ferner Determinanten, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Differenzenrechnung, Interpolation und Variationsrechnung. Aber auch in dem Vorhandenen klafften noch Lücken. Z. B. fehlten die höheren Transzendenten und bestimmten Integrale und (außer in der Algebra) die Untersuchungen an komplexen Veränderlichen. Außerdem stak noch alles voll von Zetteln mit Verweisungen auf Literatur, Andeutungen zu weiteren Ausführungen usw. So erhielt ich das hinterlassene Manuskript, um es zu ergänzen und für den Druck zu bearbeiten. Diese Bearbeitung [46] ist vor kurzem erschienen.

Ich hatte nicht den Vorzug, v. Braunmühls Schüler zu sein und habe eigentlich nicht in persönlicher Beziehung zu ihm gestanden.[1]) Allein zufolge der letzten Arbeit wurde ich mittelbar durch den jetzt Entschlafenen in ein Gebiet eingeführt, dessen Wichtigkeit ich, besonders als Lehrer, nie verkannte, dessen Reize aber erst offenbar werden, wenn man sich näher mit ihm beschäftigt. In diesem Sinne darf ich v. Braunmühl meinen Lehrer nennen, und habe deshalb gerne durch einen Nachruf meinem Danke Ausdruck geben wollen.

Verzeichnis der Veröffentlichungen A. v. Braunmühls.

1. *Die geodätischen Linien der Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung;* Math. Modelle, angefertigt im math. Institut der K. Techn. Hochschule in München, unter Leitung von Prof. Dr. Brill. Abt. II, VIII (1877).

2. *Über geodätische Linien auf Rotationsflächen und ihre Einhüllenden.* Inaug.-Diss. Univ. München. 52 S. 8°.

3. *Über Enveloppen geodätischer Linien;* Math Ann. **14** (1879), S. 557—566.

1) Alles, was über die persönlichen Mitteilungen hinausgeht, die in dem von H. Burkhardt, S. Finsterwalder und S. Günther verfaßten Nekrolog des Jahresberichtes der K. Technischen Hochschule München 1907/8 enthalten sind, verdanke ich der Liebenswürdigkeit von Frau v. Braunmühl.

4. *Über die kürzesten Linien developpabler Flächen;* Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen **15** (1879), S. 402—405.

5. *Über ein Problem des Minimums;* Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen **16** (1880), S. 69—70.

6. *Ein Verfahren zur Division ganzer Zahlen;* Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen **16** (1880), S. 272—274.

7. *Über Enveloppen geodätischer Linien auf dem verlängerten und abgeplatteten Rotationsellipsoid;* Math. Modelle, angefertigt im math. Institut der K. Techn. Hochschule in München unter Leitung von Prof. Dr. BRILL. XVIII (1880).

8. *Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiachsigen Flächen 2. Grades;* Math. Ann. **20** (1882), S. 557—586, m. 1 Tfl.

9. *Über die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren;* Abh. (math.-phys.) Ak. München **14** (1883), 3. Abt., S. 93—110.

10. *Notiz über geodätische Linien auf den dreiachsigen Flächen 2. Grades, welche sich durch elliptische Funktionen darstellen lassen;* Math. Ann. **26** (1886), S. 151—153.

11. *Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunktionen;* Abh. (math. phys.) Ak. München **16** (1887), 2. Abt., S. 327—368.

12. *Note über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind und das Additionstheorem der zugehörigen Thetafunktionen;* Sitzungsber. phys.-med. Soc. Erlangen **18** (1886), S. 37—44.

13. *Über die GÖPELsche Gruppe p-reihiger Thetacharakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Fundamentalrelationen der zugehörigen Thetafunktionen;* Math. Ann. **32** (1888), S. 513—544.

14. *Über Gruppen von p-reihigen Charakteristiken, die aus n^{teln} ganzer Zahlen gebildet sind, und die Relationen zugehöriger Thetafunktionen n^{ter} Ordnung;* Math. Ann. **37** (1890), S. 61—99.

15. *Zur Geschichte der Entdeckung der Sonnenflecken;* Beilage z. Allg. Zeitung, München 1890, Nr. 107.

16. *Über die ersten Kegelschnittzirkel;* Zeitschr. Math. Phys. **35** (1890) hist.-lit. Abt., S. 161—165.

17. *Christoph SCHEINER als Mathematiker, Physiker und Astronom;* Bayer. Bibliothek **24**. Bamberg, Buchner, 1891. 94 S. 8° mit Porträt SCHEINERS als Titelbild.

18. *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts;* Katalog math. u. math.-phys. Modelle etc., herausgeg. v. WALTHER DYCK, München 1892, S. 54—88.

19. *GALILEO GALILEI;* Himmel und Erde **5** (1893), S. 493—504, 541—552.

20. *Geschichtliches über Sonnenflecken;* Beilage z. Allg. Zeitg., München 1893, Nr. 66—67.

21. *Über eine an der Bibliothek der Universität München vorhandene Sammlung von Originalbeobachtungen aus der Zeit der Entdeckung der Sonnenflecken;* Jahrb. f. Münchener Geschichte, herausg. v. TRAUTMANN **5** (1894), S. 53—60.

22. *Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik an der K. Technischen Hochschule zu München;* Bibl. math., Neue Folge **9** (1895), S. 89—90.

23. *Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie;* Bibl. math., Neue Folge **10** (1896), S. 105—108.

24. *Nicolaus Coppernicus;* Biogr. Blätter, herausgeg. v. A. Bettelheim, Berlin, **2** (1896), S. 267—279.

25. [Nekrolog auf] *L. Muggenthaler;* Jahresber. der K. Techn. Hochschule München, 1895/96.

26. [Nekrologe auf] *Franz Neumann und Christian Wiener;* Biogr. Jahrb. u. Deutsch. Nekrolog, herausg. v. A. Bettelheim, Berlin, **1** (1897), S. 205—207, 207—209.

27. *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie;* Abh. Leop. Ak. **71** (1897), S. 1—30, m. 1 Tfl.

28. *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan;* Abh. Leop. Ak. **71** (1897), S. 31—68, m. 2 Tfln.

29. *Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der K. Techn. Hochschule zu München;* Bibl. math., Neue Folge **11** (1897), S. 113—115.

30. *Zur Geschichte des sphärischen Polardreiecks;* Bibl. math., Neue Folge **12** (1898), S. 65—72.

31. *Geschichtliche Darstellungen der hauptsächlichsten Theorien über die Entstehung des Sonnensystems;* Himmel und Erde **10** (1898), S. 289—300, 357—374.

32. [Nekrologe auf] *Leonhard Sohncke, Karl Weierstrass, Ludwig v. Seidel;* Biogr. Jahrb. u. Deutsch. Nekrolog, herausg. v. A. Bettelheim, Berlin, **2** (1898), S. 167—170, 170—173, Ergänzungen u. Nachträge S. 415—417.

33. *Beiträge zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie;* Abh. Gesch. math. Wiss. **9** (1899), S. 15—29.

34. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* Erster Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Leipzig, B. G. Teubner 1900. 260 S. 8°.

35. *Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie;* Bibl. math. (3) **1** (1900), S. 64—74.

36. [Nekrolog auf] *Sophus Lie;* Biogr. Jahrb. u. Deutsch. Nekrolog, herausg. v. A. Bettelheim, Berlin, **4** (1900), S. 324—325.

37. *Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation;* Bibl. math. (3) **2** (1901), S. 86—96.

38. *Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes;* Bibl. math. (3) **2** (1901), S. 97—102.

39. *Zur Geschichte der Trigonometrie im 18. Jahrhundert.* a) Die sogenannten Mollweideschen Gleichungen. b) Graphische Ableitung der Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie; Bibl. math. (3) **2** (1901), S. 103—110.

40. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* Zweiter Teil. Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Leipzig, B. G. Teubner 1903. 264 S. 8°.

41. *Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes.* Bibl. math. (3) **5** (1904), S. 355—365; Atti congr. int. sc. storiche **12** (1904), S. 271—284.

42. *Zur Geschichte der Differentialgleichungen;* Verh. III. Int. Math.-Kongr. Heidelberg 1904. Leipzig 1905, S. 551—555.

43. *Le séminaire d'histoire des mathématiques à l'école polytechnique de Munich;* L'enseign. math. **7** (1905), S. 65—66.

44. *Trigonometrie, Polygonometrie und Tafeln [von 1759 bis 1799].* XXIII. Abschnitt der „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", herausg. v. MORITZ CANTOR, IV. Bd., S. 403—450. Leipzig, B. G. Teubner 1908.

45. *LEONHARD EULER;* Mitteil. z. Gesch. Med. u. Naturw. **7** (1908), S. 1—14.

46. [*Geschichte der Mathematik. II. Teil.* Von CARTESIUS bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Dr HEINRICH WIELEITNER. I. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Bearbeitet unter Benutzung des Nachlasses von Dr. ANTON VON BRAUNMÜHL. Leipzig, G. J. Göschen 1911. 251 S. 8°.]

Dazu viele Besprechungen in den Bl. Bayer. Gymn.-Schulwesen von **32** (1896) an bis **43** (1907).