Computing Reviews vol 13, #9.
Sept 1972 p415 # 23815
The exact value is found for the maximal possible number S(n) of product terms in the reduced disjunctive normal form for BF's with 5 & 6 variables. S(5) = 32, S(6) = 92 and these values are attained for symmetric functions

3039 3039

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ
Сборник трудов
1971 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 18

1	2	3	4	5	6
1	2	6	13	32	92

УДК 519.95

M.M. Gadzhiev

МАКСИМАЛЬНАЯ ДЛИНА СОКРАЩЕННОЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПЯТИ И ШЕСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

М.М. Гаджиев

Обозначим через $S(n)$ максимально возможную длину (число членов) сокращенной дизъюнктивной нормальной формы (д.н.ф.) для булевых функций от n -переменных. Сокращенная д.н.ф. представляет собой важный этап в минимизации булевых функций в классе д.н.ф. [1]. В отличие от совершенной д.н.ф., которая геометрически [1] представляет собой множество, составленное из вершин n-мерного единичного куба E^n, сокращенная д.н.ф. представляет собой множество, составленное из некоторых к о м б и н а ц и й этих вершин - так называемых г р а н е й n -мерного единичного куба. Оценка длины сокращенной д.н.ф. связана с переходом от задания булевой функции как множества вершин к заданию ее как множества вышеупомянутых граней. Так как одна и та же вершина может входить во много граней, а грани могут содержать много различных вершин, этот переход мало обозрим. Это создает трудность в оценке величины $S(n)$.

Ранее было известно [2], что $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=6$, $S(4)=13$, $C_1\frac{3^n}{n} < S(n) < C_2\frac{3^n}{\sqrt{n}}$ для достаточно больших n . Есть предполо-

A3039

жение, что $S(n) \sim C \cdot \frac{3^n}{n}$ (C, C_1, C_2 - константы). Мотивируется это другим предположением, согласно которому функция с самой длиной сокращенной д.н.ф. должна быть с и м м е т р и ч е с к о й [3].

В связи с этим была предпринята попытка опровергнуть последнее примером, относящимся к малым значениям n. Оказалось, однако, что как при $n \leq 4$, так и при $n=5$, $n=6$ $S(n)$ достигается на симметрических функциях. Целью работы будет доказательство этого факта. По своему характеру оно является индуктивным: вопрос о длине сокращенной д.н.ф. для функций данного числа переменных сводится к вопросу о длине сокращенной д.н.ф. функций меньшего числа переменных.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - булева функция от n -переменных и $S(f)$ - сокращенная д.н.ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. В дальнейшем будем пользоваться как аналитическим, так и геометрическим представлением д.н.ф., не оговаривая особо переходов от одного к другому. Соответственно будем употреблять термины д.н.ф., конъюнкция и покрытие, грань. Обозначим через $|S(f)|$ - число конъюнкций в д.н.ф. $S(f)$ *). Основные сведения из теории д.н.ф., относящиеся к рассматриваемому вопросу, изложены в [I].

Представим n -мерный единичный куб E^n в виде объединения двух параллельных $(n-1)$-мерных граней

$$E^n = E_0^{n-1} \cup E_1^{n-1}. \qquad (*)$$

Для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ д.н.ф. $S(f)$ имеем соответственно:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f_0(x_1, \ldots, x_n) \vee f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ S(f) &= S_0(f) \vee S_1(f) \vee S_2(f), \end{aligned} \right\} \qquad (**)$$

где

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = x_i\, f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}_i\, f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

и $S_0(f)$ содержит x_i, $S_1(f)$ содержит $\overline{x}_i$, а в $S_2(f)$ переменная x_i не входит и при этом $|S(f)| = \sum_{i=0}^{2} |S_i(f)|$. Условимся грани из $S(f)$, соответствующие $S_2(f)$, называть г р а н я м и с в я з и. Выражения (*) и (**) назовем р а з л о ж е н и я м и E^n, $f(x_1, \ldots, x_n)$ и д.н.ф. $S(f)$.

*) Через $|M|$ всюду в дальнейшем обозначается мощность множества M.

Пусть $\mathcal{K}_{i,j,\ldots,k}$ - класс функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сокращенные д.н.ф. которых содержат хотя бы по одной грани размерности $i, j, \ldots, k$ и не содержат граней других размерностей $(0 \leq i < j < \ldots < k \leq n)$. Например, $f \in \mathcal{K}_{012}$ означает, что д.н.ф. $S(f)$ функции f состоит из 0 -мерных, I-мерных и 2-мерных граней.

Напомним, что симметрической функцией называют функцию, которая не меняет своих значений при любой перестановке переменных. Очевидно, что такая функция принимает одно и то же значение на множестве вершин E^n, у которых одинаковое число единичных координат. Такое множество вершин E^n называют поясом. В E^n существует $n+1$ пояс, и так как симметрическая функция на каждом из поясов E^n может задаваться произвольно, то таких функций будет 2^{n+1}.

Симметрическую функцию обозначают символом $S_{i_1, \ldots, i_l}(x_1, \ldots, x_n)$, где индексы i_j указывают пояса E^n, на которых функция равна I.

Далее заметим, что параллельными k -мерными гранями в E^n называют грани, которые имеют вид $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}^{\sigma_{n-k}}$ при фиксированных $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$ и произвольных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-k}$. Будем говорить, что такие грани образуют k -мерное направление, которое обозначим через $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-k})$. Попутно введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если две параллельные грани одинаковой размерности образуют грань большей на единицу размерности, то будем говорить, что имеет место с к л е й к а исходных граней. Наконец, каждой l -мерной грани из д.н.ф. $S_2(f)$ сопоставим в E_i^{n-1} из разложения (*) ее $(l-1)$-мерный с л е д и заметим, что следы, как и исходные грани, тоже образуют сокращенную д.н.ф., т.е. не склеиваются.

Часто используются обозначения:

$\Gamma_i(f)$ - грань размерности i из д.н.ф. $S(f)$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ $\quad (0 \leq i \leq n)$;

$\Gamma_{i,j}(f)$ - грань размерности i из д.н.ф. $S_j(f)$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ $\quad (j = 0, 1, 2)$;

$\mathcal{D}im\, f$ - размерность функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, т.е. максимальная размерность грани из д.н.ф. $S(f)$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Далее всюду рассматриваются булевы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и их сокращенные д.н.ф. с точностью до переименования переменных.

§ I.

Рассматриваются функции от четырех переменных. Выясняются некоторые особенности строения и даются оценки сложности д.н.ф. $S(f)$ в зависимости от размерности функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если $f \in \mathcal{K}_1$, то $|S(f)| \leq 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $b_1, b_2, \dots, b_{16}$ вершины 4-мерного единичного куба E^4, и пусть $\{b_1, b_2, \dots, b_8\} = E_0^3$, $\{b_9, b_{10}, \dots, b_{16}\} = E_1^3$. Заметим, что в E^4 существует четыре I-мерных направления x_1, x_2, x_3, x_4 и если по каждому такому направлению $S(f)$ содержит не более трех I-мерных граней, то $|S(f)| \leq 12$. Допустим теперь, что по I-мерному направлению x_i $(i=1,2,3,4)$ д.н.ф. $S(f)$ содержит четыре грани (на рис.I таким направлением является x_4). Если при этом по оставшимся трем I-мерным направлениям $S(f)$ содержит не более чем по две грани, то $|S(f)| < 12$.

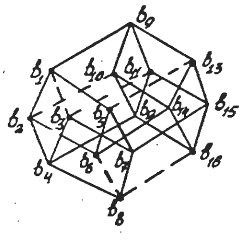

Рис. I

Если же хотя бы по одному из направлений x_1, x_2, x_3 д.н.ф. $S(f)$ содержит более двух граней, то без ограничения общности можно считать, что две из них расположены в E_0^3. Вместе с тем, если допустить, например, что грани $\{b_6, b_8\}$ $\{b_1, b_3\}$ принадлежат $S(f)$, то $S(f)$ содержит и 2-мерную грань $\{b_1, b_2, b_5, b_6\}$, что противоречит условию $f \in \mathcal{K}_1$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $f \in \mathcal{K}_1$ и $|S(f)| = 12$, то по любому I-мерному направлению $S(f)$ содержит три грани.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $f \in \mathcal{K}_1$ и $|S(f)| = 12$, то f – симметрическая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что если f^* – булева функция от трех переменных и $f^* \in \mathcal{K}_1$, то либо $|S(f^*)| = 6$, либо $|S(f^*)| < 4$. Разложим теперь E^4, f и $S(f)$ соответственно в виде (ж) и (жж). Ввиду предположения

$$|S(f)| = 12 \qquad (I)$$

и предыдущего замечания, можно считать, что

$$|S_0(f)| = 6 \quad \text{или} \quad |S_1(f)| = 6. \qquad (2)$$

Действительно, в противном случае $|S_i(f)| = 4$. $(i = 0,1,2)$, т.е. в E^4 нашлось бы I-мерное направление, по которому $S(f)$ содержало бы четыре I-мерные грани, что, однако, невозможно при выполнении условия (I) (следствие предложения I). Таким образом, $|S_0(f)| = 6$, а также в силу (I) и следствия предложения I

$$|S_2(f)| = 3. \qquad (3)$$

Отметим в заключение, что условия (I), (2) и (3) однозначно (с точностью до переименования переменных) определяют в E^4 симметрическую функцию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $f \in \mathcal{K}_2$, то $|S_2(f)| < 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В E^4 существует шесть 2-мерных направлений, и по каждому из них $S(f)$ может содержать не более двух 2-мерных граней, иначе $\mathcal{D}im\, f > 2$, что противоречит условию $f \in \mathcal{K}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $f \in \mathcal{K}_2$ и $|S(f)| = 12$, то существуют только две вершины $b_i, b_j \in E^4$ такие, что

$$f(b_i) = f(b_j) = 0 \quad \text{и} \quad \rho(b_i, b_j) = 4.\text{ж)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложениями E^4, f и $S(f)$ и заметим, что из условия $|S(f)| = 12$ следует

$$|S_i(f)| = 3 \qquad (i = 0,1). \qquad (I)$$

Действительно, если $|S_i(f)| < 3$, то, так как $|S_2(f)| < S(3) = 6$, имеем $|S(f)| < 12$. В силу (I) в E^4 существуют вершины $b_i \in E_0^3$ и $b_j \in E_1^3$ такие, что $f(b_i) = f(b_j) = 0$. Отметим теперь, что если $\rho(b_i, b_j) < 4$, то, очевидно, существует такое разложение E^4, при котором $b_i, b_j \in E_0^3$, $f(b_i) = f(b_j) = 0$ и тогда невозможно выполнение условия (I), так что $\rho(b_i, b_j) = 4$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $f \in \mathcal{K}_2$ и $|S(f)| = 12$, то f – симметрическая функция.

ж) ρ – расстояние Хэмминга между вершинами n-мерного единичного куба.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f \in \pi_2$ и $|S(f)| < 12$, то $|S(f)| \leq 9$.

Действительно, как в основном доказательстве, в этом случае, например, $|S_0(f)| < 2$, а так как любая 2-мерная грань из $S_0(f)$ содержит не более двух I-мерных следов граней связи, то $|S_2(f)| \leq 4$. Теперь остается только заметить, что

$$|S_1(f)| < 3.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $S(f) = S_0(f) \vee S_1(f) \vee S_2(f)$. Тогда

$$\max |S_i(f) \vee S_2(f)| \leq 9 \qquad (i = 0, 1)$$

$$\Gamma_j \in S_i(f) \vee S_2(f) \qquad (0 < j < 3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции f_i, $i = 0,1$, из разложения f лежат в одном из следующих классов:

а) $f_i \in \pi_1$; б) $f_i \in \pi_{12}$; в) $f_i \in \pi_2$ $\quad (i = 0,1)$;

Рассмотрим эти случаи:

а) $|S_i(f)| \leq 6$, и если $|S_i(f)| = 6$, то д.н.ф. $S_i(f)$, совпадает с сокращенной д.н.ф. симметрической функции $S_{12}(x_1, x_2, x_3)$, при этом, очевидно, число граней связи

$$|\Gamma_{1,2}(f)| < 3. \qquad (I)$$

Допустим, что $|S_i(f)| < 6$, и обозначим через α общее число граней из $S_i(f)$ и следов 2-мерных граней связи в E_i^3. Так как грани из $S_i(f)$ и указанные следы не склеиваются (в силу максимальности первых), то

$$\alpha < 6. \qquad (2)$$

Если $\alpha = 6$, то, очевидно, справедливо (I). Если $\alpha < 6$, то предложение следует из того, что $|\Gamma_{1,2}(f)| < 4$.

Для б) и в) утверждение следует из того, что в обоих случаях $|S_i(f)| < 3$ и $|S_2(f)| < S(3) = 6$. $\quad (i = 0,1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $f \in \pi_{12}$ и $|\Gamma_2(f)| \geq 5$, то в E^4 существует 3-мерная грань, содержащая три 2-мерные грани из $S(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что по каждому I-мерному направлению E^4 д.н.ф. $S(f)$ содержит хотя бы одну I-мерную грань (по условию I-мерные грани в $S(f)$ имеются). Пусть одним из таких направлений будет I-мерное направление, к которому принадлежат ребра $\{b_1, b_9\}$ и $\{b_8, b_{16}\}$ 4-мерного единичного куба (рис. 2,а).

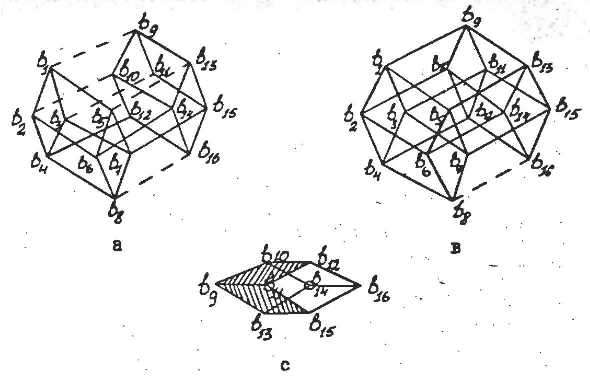

Рис. 2

Разложим функцию f и д.н.ф. $S(f)$ по этому направлению. Не ограничивая общности, можно считать, что $\{b_8, b_{16}\} \in S(f)$ и в силу максимальности грани $\{b_8, b_{16}\}$ любая 2-мерная грань связи из $S(f)$ содержит, очевидно, ребро $\{b_1, b_9\}$. Ясно, что число 2-мерных граней связи не превосходит трех, т.е. $|\Gamma_{2,2}(f)| \leq 3$. Если $|\Gamma_{2,2}(f)| = 3$ (рис. 2,а), то функция f должна быть равна I в какой-либо из вершин E^4, не лежащих на рассматриваемых гранях связи (по условию $|\Gamma_2(f)| \geq 5$), но тогда в одной из 3-мерных граней, содержащих ребро $\{b_1, b_8\}$, оказалось бы три 2-мерные грани из $S(f)$, т.е. то, что нам нужно.

Итак, по каждому I-мерному направлению число 2-мерных граней связи "мало" - оно не более двух, так что число 2-мерных граней в $S_0(f)$ и $S_1(f)$ "велико" - оно не меньше I, иначе для соблюдения условия $|\Gamma_2(f)| \geq 5$ необходимо было бы, чтобы либо в $S_0(f)$, либо в $S_1(f)$ имелось не менее трех 2-мерных граней из $S(f)$, т.е. то что нам нужно.

Теперь вернемся к ребру $\{b_8, b_{16}\} \in S(f)$ и рассмотрим все 3-мерные грани из E^4, содержащие его (их, очевидно, три). Так как в каждой из них имеется хотя бы одна 2-мерная грань из

$S(f)$ и каждая 2-мерная грань пересекается только с одним и тем же концом ребра $\{b_8, b_{16}\}$ (в силу его максимальности), то нетрудно видеть, что существует 3-мерная грань из E^4, содержащая т р и 2-мерные грани из $S(f)$.

Пусть теперь в E^4 существует 1-мерное направление, по которому д.н.ф. $S(f)$ не содержит I-мерных граней. Разложим f и $S(f)$ по этому направлению и заметим, что либо $f_0 \in \mathcal{N}_1$, либо $f_1 \in \mathcal{N}_1$. Действительно, если бы $f_i \in \mathcal{N}_{12}$, то без ограничения общности считая, что ребро $\{b_8, b_{16}\} \in S_i(f)$ $(i=0,1)$, и рассматривая все 3-мерные грани из E^4, содержащие это ребро, придем к уже рассмотренному выше случаю. Так что допустим, что $f_0 \in \mathcal{N}_1$ и для дальнейших рассмотрений выделим д в а случая.

СЛУЧАЙ I. Ребро $\{b_8, b_{16}\} \in S_0(f)$ и $|\Gamma_{2,2}(f)| > 3$. Если $|\Gamma_{2,2}(f)| < 3$, то, так как $|\Gamma_{2,0}(f)| = 0$ $(f_0 \in \mathcal{N}_1!)$ и по условию $|\Gamma_2(f)| \geq 5$, имеем, что $|\Gamma_{2,1}(f)| = 3$, т.е. $S_1(f)$ содержит три 2-мерные грани из $S(f)$ и, следовательно, E_1^3 является искомой 3-мерной гранью из E^4. Пусть $\{b_6, b_8\}, \{b_5, b_6\}, \{b_5, b_{13}\}, \{b_{13}, b_{15}\}$ – I-мерные следы в E_0^3 2-мерных граней связи из $S(f)$ (рис. 2,б). Так как функция должна быть равна I в одной из вершин E^4, не содержащихся в гранях связи (иначе $|\Gamma_2(f)| < 5$), то, как нетрудно видеть, найдется 3-мерная грань из E^4, содержащая т р и 2-мерные грани из $S(f)$.

СЛУЧАЙ 2. Ребро $\{b_8, b_{16}\} \in S_0(f)$, и $|\Gamma_{2,2}(f)| = 3$. В этом случае достаточно рассмотреть д.н.ф. $S_1(f)$, однозначно определенную условием $|\Gamma_{1,2}(f)| = 2$ (рис. 2,с). Грани связи обязательно пересекаются с этими двумя гранями и притом по I-мерному ребру (иначе в $S_1(f)$ образуется т р е т ь я 2-мерная грань). Так как число первых равно 3, а число вторых равно 2, то в $S_1(f)$ найдется 2-мерная грань $\Gamma_{2,2}(f)$, с которой пересекаются д в е грани связи, например T и Q; пусть X означает I-мерное направление, общее всем граням связи, в том числе T и Q. Тогда 3-мерная грань D_3, полученная присоединением к грани $\Gamma_{1,2}(f)$ направления X, будет содержать все т р и грани $\Gamma_{1,2}(f)$, T и Q из $S(f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Е с л и $f \in \mathcal{N}_{12}$, т о $|S(f)| \leq 10$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим в E^4 две параллельные 2-мерные грани $\{b_2, b_4, b_6, b_8\}$, $\{b_9, b_{11}, b_{13}, b_{15}\}$ и четыре параллельные 2-мерные грани, проходящие через пары вершин $\{b_2, b_9\}, \{b_4, b_{11}\}, \{b_6, b_{13}\}, \{b_8, b_{15}\}$ (рис. 3).

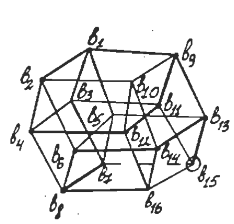

Рис. 3

Так как по условию $f \in \mathcal{N}_{12}$, то без ограничения общности можно считать, что 2-мерная грань $\{b_2, b_4, b_6, b_8\} \in S(f)$. Для дальнейших рассмотрений следует выделить 2 случая.

СЛУЧАЙ I. 2-мерная грань $\{b_9, b_{11}, b_{13}, b_{15}\} \in S(f)$. Так как к а ж д а я из четырех выделенных выше 2-мерных граней содержит не более д в у х граней из $S(f)$, то общее число граней из $S(f)$, лежащих в выделенных ш е с т и гранях куба E^4, не превосходит

$$1 + 1 + 2 \cdot 4 = 10. \tag{I}$$

Отметим также, что в (I) учтены и возможные грани связи между выделенными четырьмя параллельными 2-мерными гранями, так как возникновение грани связи ведет соответственно к уменьшению числа граней из $S(f)$ в двух из указанных четырех 2-мерных граней. Таким образом, $|S(f)| \leq 10$.

СЛУЧАЙ 2. В одной из вершин грани $\{b_9, b_{11}, b_{15}, b_{15}\}$ функция равна 0 (если функция равна нулю более чем в одной вершине этой грани, то, очевидно, $|S(f)| < 10$). Пусть $f(b_{15}) = 0$ (рис. 3). Тогда нетрудно видеть, что хотя бы одна из четырех выделенных 2-мерных граней содержит только о д н у грань из $S(f)$ и

$$|S(f)| \leq 10.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Е с л и $f \in \mathcal{N}_{12}$ и $|\Gamma_1(f)| \leq 2$, т о

$$|S(f)| \leq 9.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложениями E^4, f и д.н.ф. $S(f)$. Допустим, что

$$|S(f)| \geq 10. \tag{I}$$

Тогда число 2-мерных граней в $S(f)$ $|\Gamma_2(f)| \geq 8$, и в силу предложения 6 в E^4 найдется 3-мерная грань, например E_0^3, содержащая т р и 2-мерные грани из $S(f)$ (рис. 4). Остальные грани из $S(f)$ содержатся в д.н.ф. $S_1(f)$, а также относятся к числу граней связи. По условию $f \in \mathcal{N}_{12}$, т.е. существует хотя бы одна 1-мерная грань $\Gamma_1(f) \in S(f)$. Для дальнейших рассмотрений следует выделить 2 случая:

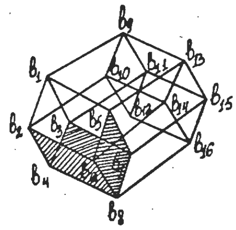

Рис. 4

а) $\Gamma_1(f) \in S_1(f)$;

б) $\Gamma_1(f) \in S_2(f)$.

Нетрудно показать, что в обоих случаях д.н.ф. $S_1(f)$ может содержать только о д н у 2-мерную грань. В частности, для а) это следует из того, что $\Gamma_1(f)$ и 2-мерная грань из $S_1(f)$ должны покрывать вершину $b_9 \in E^4$ (по условию $f \in \in \mathcal{H}_{12}$!). Из допущения (I) и условия $|\Gamma_2(f)| > 8$ следует, что в обоих случаях грани связи должны состоять из не менее чем четырех 2-мерных и, быть может, о д н о й I-мерной грани, что, очевидно, невозможно, так что $|S(f)| < 9$.

Из предложений 7 и 8 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Е с л и $f \in \mathcal{H}_{12}$ и $|S(f)| = 10$, т о

$$|\Gamma_1(f)| > 3.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IO. Е с л и $f \in \mathcal{H}_{01}$ и $|\Gamma_0(f)| \geq 2$, т о

$$|S(f)| \leq 8.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma_0(f), \Gamma_0'(f) \in S(f)$. Обозначим через ρ-расстояние в E^4 между гранями $\Gamma_0(f)$ и $\Gamma_0'(f)$. Очевидно, что $2 \leq \rho(\Gamma_0, \Gamma_0') \leq 4$, и вместе с тем нетрудно видеть, что если $\rho(\Gamma_0, \Gamma_0') = 4$, то д.н.ф. $S(f)$ не содержит I-мерных граней. Остается рассмотреть лишь два случая.

СЛУЧАЙ I. $\rho(\Gamma_0, \Gamma_0') = 3$. В E^4 существует 3-мерная грань, например E_0^3, содержащая о б е грани $\Gamma_0(f)$ и $\Gamma_0'(f)$ и такая, что ни одна из вершин E_0^3 не может быть покрыта гранями связи. Так как $|S_0(f)| \leq S(3) = 6$, то $|S(f)| \leq 8$.

СЛУЧАЙ 2. $\rho(\Gamma_0, \Gamma_0') = 2$. В отличие от предыдущего случая в E_0^3 существуют д в е вершины, которые могут быть покрыты гранями связи. Вместе с тем в силу максимальности граней $\Gamma_0(f)$ и $\Gamma_0'(f)$ в 3-мерной грани E_1^3, параллельной грани E_0^3, существуют вершины $b_i, b_j, \in E_1^3$ такие, что $f(b_i) = f(b_j) = 0$ и $\rho(b_i, b_j) = 2$, так что в д.н.ф. $S_1(f)$ может быть не более ч е т ы р е х граней из $S(f)$ и $|S(f)| \leq 8$. Отметим, наконец, что если $|\Gamma_0(f)| > 2$, то, очевидно, $|S(f)| < 8$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II. Е с л и $f \in \mathcal{H}_{012}$, т о $|S(f)| \leq 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что если $|\Gamma_0(f)| \geq 2$, то, обозначив через ρ расстояние в E^4 между 0-мерными гранями, так же как и в предыдущем предложении, нетрудно показать, что $|S(f)| \leq 7$; так что пусть $|\Gamma_0(f)| = 1$ и $\{b_9\}$ – 0-мерная грань из $S(f)$ (рис. 4). Остальные грани из $S(f)$ могут образоваться из ш е с т и 2-мерных граней, покрывающих вершину $b_8 \in E^4$. Покажем, что

$$|\Gamma_1(f)| + |\Gamma_2(f)| \leq 6. \qquad (I)$$

С этой целью заметим, что если $|\Gamma_2(f)| > 4$, то функция во всех вершинах п е р в о г о пояса E^4 равна единице и $|\Gamma_1(f)| = 0$, что противоречит условию $f \in \mathcal{H}_{012}$, так что

$$0 < |\Gamma_2(f)| \leq 3. \qquad (2)$$

Вместе с тем если $|\Gamma_1(f)| > 5$, то $f(b_8) = 0$ и $|\Gamma_2(f)| = 0$, что также противоречит условию $f \in \mathcal{H}_{012}$; так что

$$0 < |\Gamma_1(f)| \leq 4. \qquad (3)$$

Наконец, если $|\Gamma_2(f)| = 3$, то функция не более чем в одной вершине первого пояса равна 0 и $|\Gamma_1(f)| \leq 3$, т.е. (I) справедливо. Если же $|\Gamma_2(f)| < 3$, то (I) следует с учетом (3).

Далее нами будет использовано следующее почти очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I2. Е с л и $f \in \mathcal{H}_{02}$, т о $|S(f)| < 7$.

В [2] показано, что симметрическая функция $S_{124}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ является самой сложной по числу конъюнкций в $S(f)$ в классе всех функций от четырех переменных. При нахождении величины $S(5)$ важно знать все функции ч е т ы р е х переменных, на которых достигается $S(4)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I3. В е л и ч и н а $S(4) = 13$ д о с т и г а е т с я т о л ь к о н а с и м м е т р и ч е с к о й ф у н к ц и и $S_{124}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ж).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим все функции от четырех переменных в виде следующих классов:

$$\{K_1\} \quad f: \quad \mathrm{Dim}\, f \geq 2;$$

$$\{K_2\} \quad f: \quad \mathrm{Dim}\, f = 1 \;\&\; \overline{\exists \Gamma_0 \in S(f)};$$

$$\{K_3\} \quad f: \quad \mathrm{Dim}\, f \leq 1 \;\&\; \overline{\exists \Gamma_0 \in S(f)}.$$

ж) См. соглашение на стр. 3.

Найдем максимальную длину д.н.ф. $\mathcal{S}(f)$ для функций из этих классов.

$\{K_1\}$ Так как $\mathcal{S}(3)=6$, если $\mathrm{Dim}\, f > 2$, то $|\mathcal{S}(f)| \leqslant 7$. Во всех остальных случаях $|\mathcal{S}(f)| \leqslant 12$ (предложения 3,7,II и I2).

$\{K_2\}$ $|\mathcal{S}(f)| \leqslant 12$ (предложение I).

$\{K_3\}$ Если $\mathrm{Dim}\, f < 1$, т.е. д.н.ф. $\mathcal{S}(f)$ целиком состоит из 0-мерных граней, то очевидно, что $|\mathcal{S}(f)| \leqslant 8$, так что пусть $\mathrm{Dim}\, f = 1$ и $|\Gamma_0(f)| = 1$ (если $|\Gamma_0(f)| \geqslant 2$, то $|\mathcal{S}(f)| \leqslant 8$ в силу предложения I0). Не ограничивая общности, можно считать, что $\{b_9\}$ - 0-мерная грань из $\mathcal{S}(f)$ (см. рис. 4). В силу максимальности грани $\{b_9\}$ во всех вершинах 3 пояса E^4 функция равна 0. Допустим теперь, что хотя бы одна из I-мерных граней д.н.ф. покрывает вершину $b_8 \in E^4$, например $\{b_4, b_8\} \in \mathcal{S}(f)$. Тогда грани $\{b_2, b_6\}, \{b_3, b_7\}$ и $\{b_{12}, b_{16}\}$ не могут быть гранями из д.н.ф. $\mathcal{S}(f)$ $(\mathrm{Dim}\, f = 1!)$, а из оставшихся I3 граней нетрудно выделить хотя бы т р и пары таких, что из каждой пары только одна грань может содержаться в д.н.ф. $\mathcal{S}(f)$, т.е. в этом случае $|\mathcal{S}(f)| \leqslant 12$. Если же грани из $\mathcal{S}(f)$ покрывают только вершины I и 2 пояса E^4, т.е. рассматриваемая д.н.ф. совпадает с д.н.ф. симметрической функции $S_{124}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, то $|\mathcal{S}(f)| = 13$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Предложение 2 и следствие I предложения 4 означают, что с и м м е т р и ч е с к о й является не только функция с $|\mathcal{S}(f)| = 13$, но также и функции, у которых $|\mathcal{S}(f)| = 12$.

§ 2.

Рассматриваются функции от пяти переменных. Используя разложения E^5, $f(x_1, \ldots, x_5)$ и д.н.ф. $\mathcal{S}(f)$, даются оценки сложности $\mathcal{S}(f)$ и $\mathcal{S}_i(f)$, а также выясняется структура граней в $\mathcal{S}(f)$ в зависимости от размерностей граней в $\mathcal{S}_i(f)$ $(i = 0, 1, 2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I4. Е с л и f_0, f_1 и $\mathcal{S}_1(f)$ и з р а з л о ж е н и я f и $\mathcal{S}(f)$ т а к о в ы, ч т о

(а) $f_0 \in \mathcal{K}_{12}$ и $|\Gamma_{2,0}(f)| > 5$;

(б) $f_1 \in \mathcal{K}_{12}$ и $|\mathcal{S}_1(f)| = 12$,

т о $\mathcal{S}(f)$ с о д е р ж и т 3 - м е р н у ю г р а н ь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{b_1, b_2, \ldots, b_{16}\} = E_0^4$, $\{b_1', b_2', \ldots, b_{16}'\} = E_1^4$, где E_0^4 и E_1^4 - 4-мерные грани из разложения E^5. В силу (а) и предложения 6 в E_0^4 существует 3-мерная грань, содержащая

т р и 2-мерные грани из $\mathcal{S}_0(f)$, так что без ограничения общности можно считать, что $f(b_1) = 0$ и $\{b_2, b_4, b_6, b_8\}, \{b_3, b_4, b_7, b_8\}, \{b_5, b_6, b_7, b_8\}$ - искомые 2-мерные грани из $\mathcal{S}_0(f)$ (см. рис. 4).

В силу (б) и предложения 4 в 4-мерной грани E_1^4 из разложения E^5 существуют только д в е вершины b_i', b_j' такие, что $f(b_i') = f(b_j') = 0$ и $\rho(b_i', b_j') = 4$. Положим $b_i' = b_8' \in E_1^4$ (в противном случае $\mathcal{S}(f)$ содержит 3-мерную грань с 2-мерным следом, покрывающим вершину $b_8 \in E_0^4$), тогда $b_j' = b_9'$, т.е.

$$f(b_8') = f(b_9') = 0. \qquad \text{(I)}$$

Так как $f_0 \in \mathcal{K}_{12}$, то существует грань $\Gamma_{1,0}(f) \in \mathcal{S}_0(f)$. Покажем, что $\Gamma_{1,0}(f)$ - одна из I-мерных граней E_0^4, покрывающих вершину b_9.

Действительно, если допустить, что $\Gamma_{1,0}(f) = \{b_8, b_{16}\}$, то из максимальности грани $\Gamma_{1,0}(f)$ следует, что $f(b_{12}) = f(b_{14}) = f(b_{15}) = 0$ и $|\Gamma_{2,0}(f)| < 5$, т.е. получим противоречие с (а). Если же допустить, что $\Gamma_{1,0}(f) = \{b_t, b_p\}$, где $b_t \in \{b_2, b_3, \ldots, b_7\}$, а $b_p \in \{b_{10}, b_{11}, \ldots, b_{15}\}$, то опять-таки в силу максимальности грани $\Gamma_{1,0}(f)$ в E_1^4 хотя бы в одной из вершин b_t', b_p' функция должна быть равна 0, т.е., учитывая (I), имеем, что не менее чем в т р е х вершинах E_1^4 функция должна быть равна нулю, во тогда $|\mathcal{S}(f)| < 12$ (следствие 2, предложение 4), что, однако, противоречит (б).

Таким образом, I-мерная грань $\Gamma_{1,0}(f) \in \mathcal{S}_0(f)$ покрывает вершину $b_9 \in E_0^4$. Теперь остается только показать, что при любом выборе грани $\Gamma_{1,0}(f)$ д.н.ф. $\mathcal{S}(f)$ содержит 3-мерную грань. Пусть $\Gamma_{1,0}(f) = \{b_9, b_{13}\}$ (рис. 4). Заметим попутно, что хотя бы в одной из вершин $b_{12}, b_{14}, b_{15} \in E_0^4$ значение функции отлично от нуля (иначе $|\Gamma_{2,0}(f)| < 5$). Выделим д в а случая.

СЛУЧАЙ I. Во всех вершинах $b_{12}, b_{14}, b_{15} \in E_0^4$ значение функции отлично от нуля. Тогда $\mathcal{S}(f)$ содержит 3-мерную грань с 2-мерным следом, например $\{b_5, b_6, b_{13}, b_{14}\}$.

СЛУЧАЙ 2. Только в одной из перечисленных выше вершин, например в $b_{12} \in E_0^4$, значение функции равно I. Так как в этом случае либо $f(b_{10}) = 1$, либо $f(b_{11}) = 1$ (иначе $|\Gamma_{2,0}(f)| < 5$), то $\mathcal{S}(f)$ содержит 3-мерную грань с 2-мерным следом, например

$$\{b_2, b_4, b_{10}, b_{12}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I5. П у с т ь $S(f)=S_0(f)\vee S_1(f)\vee S_2(f)$. Е с л и $|S_2(f)| = 13$, т о $|S_i(f)| \leq 10$ $(i=0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как величина $S(4)=13$ достигается только на симметрической функции (предложение I3), то из условия предложения следует, что множество следов граней связи образует в гранях E_i^4, взятых из разложения E^5, сокращенную д.н.ф. симметрической функции $S_{124}(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Обозначим теперь через $\mathcal{B}^i$ множество вершин E_i^4, в которых значение функции может быть доопределено, и отметим, что для любых двух вершин $b_j, b_k \in \mathcal{B}^i$

$$\rho(b_j, b_k) \leq 3. \qquad (I)$$

Покажем теперь, что при любом доопределении функции в вершинах множества $\mathcal{B}^i$

$$|S_i(f)| \leq 10 \qquad (i=0,1). \qquad (2)$$

Для этого сначала заметим, что множество $\mathcal{B}^i$ таково, что если для любой вершины $b_j \in \mathcal{B}^i$ $f(b_j)=1$, то $Dim\, f_i \geq 2$ (если $Dim\, f_i \geq 3$, то, очевидно, (2) имеет место), т.е. либо $f_i \in \mathcal{N}_2$, либо $f_i \in \mathcal{N}_{12}$ (отметим также, что множество $\mathcal{B}^i$ таково, что $S_i(f)$ не может содержать 0-мерную грань из $S(f)$.

Если $f_i \in \mathcal{N}_2$, то в силу предложения 4, чтобы $|S_i(f)|=12$, необходимо существование д в у х вершин $b_j, b_k \in \mathcal{B}^i$ таких, что $\rho(b_j, b_k)=4$ и $f(b_j)=f(b_k)=0$, что, однако, невозможно в силу (I), т.е. $|S_i(f)| \leq 9$ (следствие 2 предложения 4). Если $f_i \in \mathcal{N}_{12}$, то (2) следует из предложения 7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I6. $\max\limits_{\Gamma_j \in S_i(f)\vee S_2(f)} |S_i(f)\vee S_2(f)| \leq 24$ $(i=0,1)$, $(0 \leq j \leq 4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $|S_i(f)| \leq (4)=13$. Если $|S_2(f)|=13$, то $|S_i(f)| \leq 10$ (предложение I5) $(i=0,1)$. Вместе с тем, если $|S_i(f)|=13$, то f_i – симметрическая функция $S_{124}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (предложение 13), так что грани связи в $S(f)$ I-мерные и утверждение очевидно. Наконец, если $|S_i(f)| \leq 12$, то, быть может, и $|S_2(f)| \leq 12$.

СЛЕДСТВИЕ. Е с л и $|S_i(f)| \leq 6$, т о $|S(f)| \leq 30$ $(i=0,1)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I7. Е с л и д.н.ф. $S_2(f)$ и з р а з л о ж е н и я $S(f)$ с о с т о и т и з I - м е р н ы х и 2 - м е р н ы х г р а н е й и $|\Gamma_{1,2}(f)| > 2$, т о $|S_2(f)| \leq 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через B^0 и B^1 множество следов в E_i^4 соответственно I-мерных и 2-мерных граней из $S_2(f)$ и отметим, что в силу максимальности граней из $S_2(f)$ для любых следов $\Gamma_0 \in B^0$ и $\Gamma_1 \in B^1$ имеем

$$\rho(\Gamma_0, \Gamma_1) > 2. \qquad (I)$$

Заметим теперь, что в силу (I) грани из B^0 и B^1 можно рассматривать как 0-мерные и I-мерные грани из $S(f)$ функции ч е т ы р е х переменных, так что утверждение предложения следует из предложения I0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I8. П у с т ь $|\Gamma_{1,i}(f)|$ – ч и с л о I-м е р н ы х г р а н е й в $S_i(f)$, а $|\Gamma_1^2(f)|$ – ч и с л о I - м е р н ы х с л е д о в в E_i^4 2 - м е р н ы х г р а н е й с в я з и. Е с л и $Dim\, f \leq 2$, т о $|\Gamma_{1,i}(f)| + |\Gamma_1^2(f)| \leq 12$ $(i=0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим E_i^4 из разложения E^5 $(i=0,1)$. Присоединим к I-мерным граням из $S_i(f)$ все следы 2-мерных граней связи из $S(f)$, расположенные в E_i^4. В силу максимальности первых следы не склеиваются с этими гранями. По своему происхождению из $S(f)$ следы не склеиваются и друг с другом. Это означает, что полученная д.н.ф. является сокращенной и число членов в ней не больше I2 (предложение I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I9. П у с т ь $S(f)=S_0(f)\vee S_1(f)\vee S_2(f)$. Е с л и $f \in \mathcal{N}_2$ и $|S_1(f)|=12$, т о $|S_0(f)| \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4 существует только д в е вершины $b_i', b_j' \in E_1^4$, такие, что $f(b_i')=f(b_j')=0$ и $\rho(b_i', b_j')=4$. Заметим, теперь, что любая грань из $S_0(f)$ должна покрывать одну из вершин $b_i, b_j \in E_0^4$, таких, что $\rho(b_i, b_i') = \rho(b_j, b_j') = 1$ и $\rho(b_i, b_j) = 4$ (иначе $Dim\, f \geq 3$, что противоречит условию $f \in \mathcal{N}_2$). Без ограничения общности можно положить $b_i = b_8$ и $b_j = b_9$ (рис. 5). Допустим, что грань $\{b_2, b_4, b_6, b_8\} \in S_0(f)$. В этом случае вершину $b_9 \in E_0^4$ могут покрывать только грани $\{b_1, b_2, b_9, b_{10}\}$ и $\{b_9, b_{11}, b_{13}, b_{15}\}$ из $S_0(f)$ (иначе $Dim\, f \geq 3$), так что если грани из $S_0(f)$ покрывают о б е вершины b_8 и b_9 из E_0^4, то $|S_0(f)| < 8$. Наконец, если грани из $S_0(f)$ покрывают только одну из этих вершин, то $|S_0(f)| \leq 6$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Е с л и $f \in \mathcal{N}_{012}$, т о $|S(f)| \leq 30$.

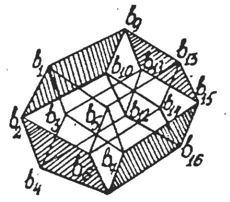

Рис. 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что либо заведомо $|S(f)| < 30$, либо найдется вершина $b_j \in E^5$ $(j = 1, 2, \ldots, 32)$, которой касаются 2-мерная и I-мерная грани из $S(f)$, так что существует разложение E^5 по переменной x_i $(i = 1, \ldots, 5)$, при котором без ограничения общности можно считать, что f_0 из разложения f одного из следующих видов:

А) $f_0 \in \mathcal{N}_{12}$;

Б) $f_0 \in \mathcal{N}_{012}$.

Рассмотрим обе эти возможности.

А). В силу предложения 7

$$|S_0(f)| < 10. \qquad \text{(I)}$$

По условию $f \in \mathcal{N}_{012}$, так что f_1 из разложения f одного из следующих видов:

а$_1$) $f_1 \in \mathcal{N}_0$; а$_2$) $f_1 \in \mathcal{N}_{01}$; а$_3$) $f_1 \in \mathcal{N}_{02}$; а$_4$) $f_1 \in \mathcal{N}_{012}$.

Если f_1 вида а$_1$), то очевидно, что $|S(f)| < 30$. Если f_1 вида а$_3$) и а$_4$), то в силу предложений II и 12 имеем

$$|S_1(f)| \leq 7. \qquad (2)$$

Так как $|S_2(f)| < S(4) = 13$, то из (I) и (2) следует, что $|S(f)| \leq 30$. Если $f_1 \in \mathcal{N}_{01}$, то $|S_1(f)| \leq 13$; при этом если $|S_1(f)| = 13$, то $S_1(f)$ совпадает с $S(f)$ симметрической функции $S_{124}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (предложение I3), так что грани связи в этом случае I-мерные, число их $|\Gamma_{1,2}(f)| < 6$ и $|S(f)| < 30$. Пусть $|S_1(f)| < 13$. Найдем число I-мерных и 2-мерных граней связи. В силу предложения I8 число I-мерных граней в $S_1(f)$ и число I-мерных следов 2-мерных граней связи не больше I2. Вместе с тем число I-мерных граней связи не больше 8, так что, учитывая (I), имеем $|S(f)| < 30$.

Б) В силу предложения II

$$|S_0(f)| \leq 7. \qquad (3)$$

Если $|S_0(f)| < 7$, то предложение следует из следствия предложения I4. Пусть $|S_0(f)| = 7$. По условию $f_0 \in \mathcal{N}_{012}$, так что гра-

ни связи из $S(f)$ могут образовываться не более чем на п я т и 2-мерных и о д н о й I-мерной грани из $S_0(f)$, так что число их $|S_2(f)| < 11$ и тем самым $|S(f)| < 30$.

ТЕОРЕМА I. И м е е т м е с т о $S(5) = 32$. Э т о з н а ч е н и е д о с т и г а е т с я т о л ь к о н а с и м м е т р и ч е с к о й ф у н к ц и и $S_{0235}(x_1, \ldots, x_5)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим все функции от пяти переменных в виде следующих классов:

$\{K_1\}$ f: $\mathrm{Dim}\, f \geq 3$;

$\{K_2\}$ f: $\mathrm{Dim}\, f = 2 \;\&\; \overline{\exists \Gamma_0 \in S(f)}$;

$\{K_3\}$ f: $\mathrm{Dim}\, f = 1 \;\&\; \overline{\exists \Gamma_0 \in S(f)}$;

$\{K_4\}$ f: $\mathrm{Dim}\, f \leq 2 \;\&\; \exists \Gamma_0 \in S(f)$.

Рассмотрим каждый из этих классов и найдем максимальную длину сокращенной д.н.ф. функций, входящих в них.

$\{K_1\}$ Так как $S(4) = 13$ (предложение I3), то, если $\mathrm{Dim} f > 3$, имеем, очевидно, что $|S(f)| \leq 14$. Пусть $\mathrm{Dim} f = 3$, т.е. существует хотя бы одна грань $\Gamma_3 \in S(f)$. Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma_3 \in S_0(f)$ и, следовательно,

$$|S_0(f)| \leq 7. \qquad \text{(I)}$$

Выясним теперь, сколько граней из $S(f)$ может содержаться в д.н.ф. $S_1(f)$. С этой целью заметим, что 3-мерная грань $\Gamma_3' \subset E_1^4$, параллельная грани Γ_3, не может содержать ни одной грани из $S_1(f)$. Действительно, любая грань $\Gamma_j' \subset \Gamma_3'$ $(j = 0, 1, 2)$ склеится с параллельной ей гранью $\Gamma_j \subset \Gamma_3$, так что если воспользоваться теперь предложением 5, то имеем

$$|S_1(f)| \leq 9. \qquad (2)$$

Так как $|S_2(f)| \leq S(4) = 13$, то из (I) и (2) следует, что для любой функции класса $\{K_1\}$ имеет место $|S(f)| \leq 29$.

$\{K_2\}$ Рассмотрим следующие случаи:

А) $|\Gamma_2(f)| = 1$, $|\Gamma_1(f)| > 0$;

Б) $|\Gamma_2(f)| \geq 2$, $|\Gamma_1(f)| > 0$;

В) $|\Gamma_2(f)| > 2$; $|\Gamma_1(f)| = 0$.

А) Пусть $\Gamma_2 \in S_0(f)$, тогда $|S_0(f)| \leq 10$ (предложение 7), $|S_1(f)| \leq 12$ (предложение I), $|S_2(f)| \leq 8$ и $|S(f)| < 30$.

Б) Отметим сначала, что либо заведомо $|S(f)|<30$, либо существует вершина $l_j \in E^5$ $(j=1,2,\dots,32)$, в которой касаются I-мерная и 2-мерная грани из $S(f)$, т.е. при разложении E^5 по некоторой переменной x_i $(i=1,2,3,4,5)$ без ограничения общности можно считать, что $f_0 \in \mathcal{K}_{12}$ и $|S_0(f)| \leqslant 7$ (предложение 7). Функция f_1 из разложения f может быть одного из следующих классов:

б$_\text{I}$) $f_1 \in \mathcal{K}_1$; б$_2$) $f_1 \in \mathcal{K}_{12}$; б$_3$) $f_1 \in \mathcal{K}_2$.

Найдем $|S_1(f)|$, $|S_2(f)|$ и тем самым $|S(f)|$.

б$_\text{I}$) $|S_1(f)| < 12$ (предложение I). В силу предложения I8 число I-мерных граней в $S_1(f)$ и число 2-мерных граней связи будет $|\Gamma_{1,1}(f)|+|\Gamma_{2,2}(f)| \leqslant 12$, так что остается только подсчитать число I-мерных граней связи. Вместе с тем легко видеть, что $|\Gamma_{1,2}(f)| \leqslant 8$ и, следовательно, $|S(f)| < 30$.

б$_2$) $|S_i(f)| \leqslant 10$ (предложение 7). Если $|S_i(f)|=10$, то $|\Gamma_{1,i}(f)| \geqslant 3$ (предложение 9) и в силу предложения I8 $|\Gamma_{2,2}(f)| \leqslant 9$. Допустим, что среди граней связи есть и I-мерные грани. Тогда если $|\Gamma_{1,2}(f)| \geqslant 2$, то $|S_2(f)| < 8$ (предложение I7), если $|\Gamma_{1,2}(f)| = 1$, то $|S_2(f)| \leqslant 10$ и $|S(f)| \leqslant 30$. Пусть теперь $|S_i(f)| < 10$ $(i=0,1)$. По условию $f_i \in \mathcal{K}_{12}$, т.е. существует грань $\Gamma_1 \in S(f)$, и потому $|\Gamma_{2,2}(f)| \leqslant 11$ (предложение I8). Считая, что $|\Gamma_{1,2}(f)| \leqslant 1$ (если $|\Gamma_{1,2}(f)|>1$, то $|S_2(f)| \leqslant 8$ (предложение I7)), имеем $|S_2(f)| \leqslant 12$, так что $|S(f)| \leqslant 30$.

б$_3$) Допустим, что $|S_1(f)|=12$, и рассмотрим д в а случая:

б$_3'$) $|\Gamma_{2,0}(f)| \geqslant 5$, тогда в силу предложения I4 $S(f)$ содержит 3-мерную грань, т.е. $\mathcal{D}im\, f \geqslant 3$, так что $|S(f)|<30$ (см. $\{K_1\}$).

б$_3''$) $|\Gamma_{2,0}(f)| < 5$. Если $|S_0(f)|=10$, то $|\Gamma_{1,0}(f)| \geqslant 6$, и в силу предложения I8 $|\Gamma_{2,2}(f)| \leqslant 6$, т.е. $|S_2(f)| \leqslant 8$ и $|S(f)| \leqslant 30$.

Пусть $|S_0(f)| < 10$ и $|\Gamma_{2,0}(f)| < 5$. Если $|S_0(f)| \leqslant 6$, то $|S(f)| \leqslant 30$ (следствие предложения I5), так что $|S_0(f)| \geqslant 7$, т.е. $|S_0(f)|=7$, $|S_0(f)|=8$, $|S_0(f)|=9$. Ограничимся рассмотрением случая: $|S_0(f)|=7$. Оставшиеся о б а случая рассматриваются аналогично. Так как $|\Gamma_{2,0}(f)| < 5$, то из того, что $|S_0(f)| = 7$, следует $|\Gamma_{1,0}(f)| \geqslant 3$, т.е. $|\Gamma_{2,2}(f)| \leqslant 9$ (предложение I8) и $|S_2(f)| \leqslant 10$, так что $|S(f)| \leqslant 30$.

В заключение заметим, что если $|S_1(f)| < 12$, то в силу следствия предложения 4 $|S_1(f)| \leqslant 9$. При этом если $|S_0(f)|=10$, то $|\Gamma_{1,0}(f)| \geqslant 3$ (предложение 9), так что $|\Gamma_{2,2}(f)| \leqslant 9$ (предложение I8) и тем самым $|S(f)| \leqslant 10$, т.е. $|S(f)| \leqslant 29$. Если $|S_0(f)| < 10$, то так как $f_0 \in \mathcal{K}_{12}$, то $|\Gamma_{1,0}(f)| \geqslant 1$, т.е. $|\Gamma_{2,2}(f)| \leqslant 11$ (предложение I8). Таким образом, $|S_2(f)| \leqslant 12$ и $|S(f)| \leqslant 30$.

В) Если $|S_0(f)|=12$, то либо $|S_1(f)| \leqslant 6$, либо $\mathcal{D}im\, f \geqslant 3$ (предложение I9) так что в обоих случаях $|S(f)| \leqslant 30$. Действительно, в первом случае это следует из того, что $|S_2(f)| \leqslant 12$, а во втором – в силу доказанного выше (см. $\{K_2\}$). Наконец, если $|S_i(f)| < 12$, то $|S_i(f)| \leqslant 9$ (следствие предложения 4), и так как $|S_2(f)| \leqslant 12$, то $|S(f)| \leqslant 30$ $(i=0,1)$.

$\{K_3\}$ В E^5 существует пять I-мерных направлений x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, и если по каждому из них д.н.ф. $S(f)$ содержит не более чем по ш е с т ь граней, то $|S(f)| \leqslant 30$. Допустим, что по направлению x_i д.н.ф. $S(f)$ содержит б о л е е ш е с т и граней. Тогда найдется 4-мерный подкуб из E^5, например E_0^4, в котором по направлению x_i д.н.ф. $S(f)$ содержит ч е т ы р е грани (см. рис. I) и, следовательно,

$$|S_0(f)| < 12 \tag{I}$$

(следствие предложения I).

Если теперь по остальным ч е т ы р е м направлениям д.н.ф. $S(f)$ содержит не более чем по п я т ь граней, то

$$|S(f)| < 30.$$

Пусть, далее, по направлению x_j $(i \neq j)$ – одному из этих ч е т ы р е х д.н.ф. $S(f)$ содержит б о л е е п я т и граней. Возможны два случая:

а) д.н.ф. $S_1(f)$ содержит ч е т ы р е грани по направлению x_j, и, следовательно, в силу следствия предложения I

$$|S_1(f)| < 12. \tag{2}$$

Так как

$$|S_2(f)| \leqslant 8, \tag{3}$$

то из (I), (2) и (3) следует, что $|S(f)| \leqslant 30$;

б) д.н.ф. $S_0(f)$ такова, что по направлению x_i содержит ч е т ы р е грани, а по направлению x_j не менее т р е х граней. Но тогда нетрудно видеть, что д.н.ф. $S_0(f)$ содержит некоторую 2-мерную грань, т.е. $\mathcal{D}im\ f > 1$, что противоречит определению класса $\{K_3\}$. Таким образом, для любой функции рассматриваемого класса $|S(f)| \leq 30$.

$\{K_4\}$ Допустим сначала, что д.н.ф. $S(f)$ содержит только одну 0-мерную грань, т.е. $|\Gamma_0(f)| = 1$. Тогда ясно, что если $f \in \mathcal{N}_{01}$ или $f \in \mathcal{N}_{02}$, то $|S(f)| \leq 31$. Это следует из рассмотренных выше оценок длины д.н.ф. функции классов $\{K_2\}$ и $\{K_3\}$. Во всех остальных случаях $|S(f)| < 31$ (предложение 20 и оценка длины $S(f)$ для функций класса $\{K_1\}$).

Пусть теперь $|\Gamma_0(f)| \geq 2$ и Γ_0, Γ_0' – некоторые 0-мерные грани из $S(f)$. Возможны два случая:

а) $2 < \rho(\Gamma_0, \Gamma_0') \leq 4$; б) $\rho(\Gamma_0, \Gamma_0') = 5$.

Заметим, что если $|\Gamma_0(f)| > 2$, то нетрудно показать, что

$$|S(f)| < 32.$$

а) В E^5 найдется 4-мерный подкуб, например E_0^4, такой что $\Gamma_0, \Gamma_0' \in S_0(f)$ и, следовательно, $|S_0(f)| \leq 8$ (предложения I0, II, I2), причем если $|S_0(f)| < 8$, то в силу предложения I5 $|S(f)| \leq 31$; если $|S_0(f)| = 8$, т.е. $f_0 \in \mathcal{N}_{01}$ (предложение I0), то ясно, что грани связи 1-мерные и $|S(f)| \leq 30$

б) Не ограничивая общности, в качестве граней $\Gamma_0(f)$ и $\Gamma_0'(f)$ можно рассматривать вершины <u>нулевого</u> и <u>пятого</u> поясов E^5. В силу максимальности граней $\Gamma_0(f)$ и $\Gamma_0'(f)$ функция во всех вершинах <u>первого</u> и <u>четвертого</u> поясов E^5 равна нулю. Если функция при этом еще хотя бы в одной из вершин <u>второго</u> и <u>третьего</u> поясов E^5 равна нулю, то $|S(f)| < 32$. Если же функция равна I во всех вершинах <u>второго</u> и <u>третьего</u> поясов E^5, т.е. если она совпадает с симметрической функцией $S_{0235}(x_1, \ldots, x_5)$, то $|S(f)| = 32$.

§ 3.

Рассматриваются функции от шести переменных и устанавливается что $S(6) = 92$. Из теоремы I и разложения E^6, f и д.н.ф. $S(f)$ соответственно в виде (ж) и (жж) следует оценка сверху максимальной длины сокращенной д.н.ф. для булевых функций от шести переменных, а именно: $S(6) = 92$.

Покажем, что $S(6) = 92$. С этой целью заметим сначала, что если $|S_i(f)| = 32$, то $f_i \in \mathcal{N}_{01}$ (теорема I) $(i = 0,1)$, так что грани связи в $S(f)$ I-мерные и $S(f) < 92$. Вместе с тем если $|S_i(f)| \leq 30$ $(i = 0,1)$, то, так как $|S_2(f)| \leq S(5) = 92$, имеем, что

$|S(f)| \leq 92$. Пусть теперь при разложении $S(f)$ по любой из переменных $x_1, \ldots, x_6$

$$|S_0(f)| = |S_1(f)| = 31, \qquad (I)$$

и допустим, что при этом

$$|S_2(f)| \geq 30. \qquad (2)$$

Так как следы граней из $S_2(f)$ образуют в E_i^5 из разложения E^6 сокращенную д.н.ф. функции пяти переменных, то из (2) следует, что существуют грани $\Gamma_{1,2} \in S_2(f)$ и $\Gamma_{2,2} \in S_2(f)$. Из предположения (I) следует также, что либо $f_i \in \mathcal{N}_{01}$, либо $f_i \in \mathcal{N}_{02}$. Так как в первом случае грани связи I-мерные и невозможно (2), то $f_i \in \mathcal{N}_{02}$. Теперь нетрудно видеть, что при выполнении условий (I) и (2) найдется хотя бы одна из переменных $x_1, \ldots, x_6$ при разложении E^6, f и д.н.ф. $S(f)$, по которой либо $f_0 \in \mathcal{N}_{012}$, либо $f_1 \in \mathcal{N}_{12}$ и в обоих случаях $|S_i(f)| \leq 30$ $(i = 0,1)$ (предложение 20 и оценка длины $S(f)$ для функции класса $\{K_2\}$ теоремы I), что противоречит, однако, предположению (I).

Таким образом, при выполнении условия (I) имеет место $|S_2(f)| \leq 30$ и, следовательно, $|S(f)| \leq 92$.

Пусть, наконец, при разложении E^6, f и д.н.ф. $S(f)$ по любой из переменных $x_1, \ldots, x_6$

$$|S_0(f)| = 30, \quad |S_1(f)| = 31 \qquad (3)$$

Покажем, что в этом случае

$$|S_2(f)| \leq 31. \qquad (4)$$

(Отметим также, что $\mathcal{D}im\ f_i \geq 2$, иначе (4) очевидно; и, кроме того, существует грань $\Gamma_{0,1} \in S_1(f)$). Допустим, что

$$|S_2(f)| = 32. \qquad (5)$$

Так как величина $S(5) = 32$ достигается только на симметрической функции $S_{0235}(x_1, \ldots, x_5)$ (теорема I), то из (5) следует, что множество следов граней связи образует в E_i^5 из разложения E^6 сокращенную д.н.ф. симметрической функции $S_{0235}(x_1, \ldots, x_5)$ и, следовательно, существуют грани $\Gamma_{1,2}(f)$ и $\Gamma_{1,2}'(f)$ такие, что

$$\rho(\Gamma_{1,2}(f), \Gamma_{1,2}'(f)) = 5$$

и тогда, как нетрудно видеть, найдется хотя бы одна из переменных $x_1, \ldots, x_6$ при разложении E^6, f и д.н.ф. $S(f)$, по которой

$f_0 \in \mathcal{N}_{12}$, $f_1 \in \mathcal{N}_{012}$, т.е., как и в предыдущем случае, $|S_i(f)| \leq 30$, что противоречит предположению (3).

Таким образом, при выполнении (3) $|S_2(f)| \leq 31$, и $|S(f)| \leq 92$. В заключение отметим, что симметрическая функция $S_{02346}(x_1, \dots, x_6)$ имеет д.н.ф. $S(f)$, для которой $|S(f)| = 92$. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 2. Имеет место $S(6) - 92$. Это значение достигается на симметрической функции $S_{02346}(x_1, \dots, x_6)$.

Литература

1. С.В. ЯБЛОНСКИЙ. Функциональные построения в k-значной логике, Труды Мат.института им. Стеклова, 1958, LI, 5-142.
2. А.П. ВИКУЛИН. Оценка числа конъюнкций в сокращенной д.н.ф. (Дипломная работа, каф. матем.логики МГУ, 1960).
3. В.Д. КАЗАКОВ. Нахождение максимального числа простых импликатов произвольной логической функции от n-переменных. Автоматическое управление (сб.статей), Изд. АН СССР, 1960, стр. 330-338.

Поступила в редакцию
22.12.1970 г.

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ
Сборник трудов
1971 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 18

УДК 519.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ БАЗИСА, ПОРОЖДАЮЩЕГО 7-ЗНАЧНЫЕ БЕСПОВТОРНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

А.А. Евдокимов

Слово в некотором алфавите назовем бесповторным, если оно не содержит двух последовательных отрезков с одинаковым составом букв*). П.Эрдёшем [1,2] был поставлен вопрос: конечна ли длина всякого бесповторного слова в алфавите из n букв? Автором [3] доказано существование бесконечных бесповторных последовательностей при $n \geq 25$.

Пусть задан n-буквенный алфавит $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и система подстановок

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \longrightarrow & X_1, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \longrightarrow & X_n, \end{array} \qquad (1)$$

где $X_1, \dots, X_n$ – слова в алфавите $\mathfrak{X}$. Скажем, что n слов $X_1, \dots, X_n$ образуют бесповторный базис в алфавите $\mathfrak{X}$, если каково бы ни было бесповторное слово X в алфавите $\mathfrak{X}$, заменяя в X каждую букву словом согласно (1), мы получим вновь бесповторное слово. Базис назовем невырожденным, если полученное в результате замены слово длиннее слова X. Из существования для некоторого n невырожденного базиса следует, в силу конечности

*) Состав слова X в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ определяется как вектор $S(X) = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, где s_i – число букв x_i в слове X.